

# MECCANICA RAZIONALE

Docente: Davide Fermi (60h teoria)

Ufficio: Dip. Matematica, Ed. 14 Nave, 4° piano, stanza 417

Email: [davide.fermi@polimi.it](mailto:davide.fermi@polimi.it)

Webpage: <https://fermidavide.com>

Ricevimento: su appuntamento

Esercitazioni: Prof. Paolo Mora (40h)

Tutorato: circa 20h a gennaio/giugno  
(prima degli esami)

**LEZIONI:** LUN 13.15 - 15.15 (aula 26.1.4 - teoria)  
MAR 16.15 - 18.15 (aula B.3.4 - teoria)  
GIO 8.15 - 12.15. (aula 2.1.2 - esercitazioni)

Controllare sempre  
Servizi Online & Webeep  
(Calendario provvisorio)

## ESAME

- prova scritta: 1 domanda statica + 1 domanda dinamica + 1 esercizio statica + 1 esercizio dinamica  
(5 pt) (5 pt) (12 pt) (11 pt) (= 33 pt)
- prova orale: previo superamento prova scritta ( $\geq 16$ ), su richiesta del docente o della/o studente ( $\pm 3$  pt)
- NO prove in itinere

## RIFERIMENTI

1. Note del corso su webeep (scritte a mano).
2. Barletti, Frosali, *Meccanica Razionale per l'ingegneria*.
3. Barletti, Frosali, Ricci, *Esercizi di Meccanica Razionale per l'ingegneria*.
4. Belli, Morosi, Alberti, *Meccanica Razionale - Esercizi*.
5. Cercignani, *Spazio, Tempo, Movimento*.
6. Finzi, *Meccanica Razionale*.
7. Brani, Muracchini, Ruggero, Seccia, *Esercizi e Temi d'Esame di Meccanica Razionale*.
8. Tonti, *Come risolvere esercizi di Meccanica Razionale*.

## 1) INTRODUZIONE

Meccanica = teoria fisica che studia il moto di "sistemi materiali"

- ▷ Meccanicismo (Democrito, Epicuro, ..., fine 1800): ogni fenomeno fisico ammette una spiegazione meccanica.
- ▷ Contestualità (Mach 1883): la meccanica è lo studio dei sistemi fisici nei casi in cui sono trascurabili effetti termici, chimici, elettromagnetici, relativistici, quantistici, ...

Meccanica razionale = formulazione matematica della teoria fisica

- ▷ Schema logico-deduttivo (ipotesi  $\Rightarrow$  teoremi) utile per comprendere, simulare e predire fenomeni, studiare la dipendenza dai parametri, progettare macchinari, edifici, strutture, ...
- ▷ Obiettivo del corso: apprendere un metodo.
- Idealizzazione è fondamentale
  - Sistemi discreti: punti materiali, ...
  - Sistemi continui: corpi rigidi, articolati, deformabili, ..., fluidi
  - Vincoli: limitazioni su movimenti ammissibili dei sistemi
- Cinematica: studio dei moti possibili, a prescindere dalle cause (Galilei 1630)
- Statica: studio delle configurazioni di equilibrio in presenza di sollecitazioni
- Dinamica: studio dei moti e delle loro cause (Newton 1687)
- Meccanica Lagrangiana (Lagrange 1788) e Hamiltoniana (Hamilton 1833)

## 2) RICHIAMI DI CALCOLO VETTORIALE

Def: Uno spazio vettoriale reale è una terna  $(V, +, \cdot)$  formata da un insieme  $V$  e due operazioni  $+: V \times V \rightarrow V$  (somma),  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  (prodotto per scalare) t.c.:

- (1)  $(V, +)$  è un gruppo abeliano: a)  $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$  (commutatività)  
 b)  $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$  (associatività)  
 c)  $\exists \bar{0} \in V$  t.c.  $\bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$  (elem. neutro  $\equiv$  vettore nullo)  
 d)  $\exists -\bar{u} \in V$  t.c.  $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$  (elem. opposto)
- (2)  $\cdot$  è distributivo rispetto a  $+$ : e)  $(\alpha + \beta)\bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u} \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$   
 f)  $\alpha(\bar{u} + \bar{v}) = \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v}$

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \dots \in V =$  "vettori liberi"  $\rightarrow$  posizioni, velocità, accelerazioni, forze, momenti...  
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R} =$  "scalari"  $\rightarrow$  tempo, massa, temperatura, carica elettrica, ...

Def: Uno spazio affine è una terna  $(A, V, \hat{+})$  formata da un insieme  $A$ , uno sp. vettoriale  $V$  ed una operazione  $\hat{+}: A + V \rightarrow A$  (diversa da  $+$ ) t.c.:

a)  $\forall P \in A$  fissato, la mappa  $\phi: V \rightarrow A, \bar{v} \mapsto \phi(\bar{v}) := P \hat{+} \bar{v}$  è una biiezione;  
 b)  $P \hat{+} \bar{0} = \bar{0} \hat{+} P = P \quad \forall P \in A$  ( $\bar{0} \in V$  è il vettore nullo);  
 c)  $(P \hat{+} \bar{u}) \hat{+} \bar{v} = P \hat{+} (\bar{u} + \bar{v}) \quad \forall P \in A, \bar{u}, \bar{v} \in V$  (associatività).

$P, Q, R, \dots \in A =$  "punti"

$(P, \bar{u}), (Q, \bar{v}), \dots \in A \times V =$  "vettori applicati"

(con abuso di notazione, scriveremo  $\hat{+} = +$ )

Oss:  $P + \bar{u} = Q \iff \bar{u} = Q - P \equiv \overline{PQ}$   
 $-\bar{u} = P - Q = \overline{QP}$



$P =$  pt. applicazione  
 $Q =$  estremo libero  
 retta passante per  $P, Q$   
 $=$  retta di applicazione

"P viene traslato in Q da  $\bar{u}$ "

Oss: Proprietà triangolare:  $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR} \quad \forall P, Q, R \in A$  (segue da (c))

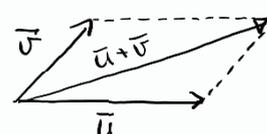
Oss: Il concetto di sp. affine è fondamentale per la relatività Galileiana e per la meccanica Newtoniana.

Leggi fisiche indipendenti dalla posizione

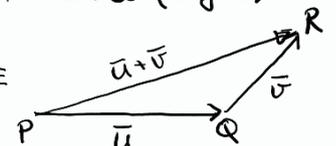
$\iff$  NON esistono punti privilegiati

Esempio:  $V = \mathbb{R}^3 \ni \bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$   
 $v_i \in \mathbb{R}$  componenti i-esime  
 $\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

$\iff$  direzione, verso, modulo (3gd)

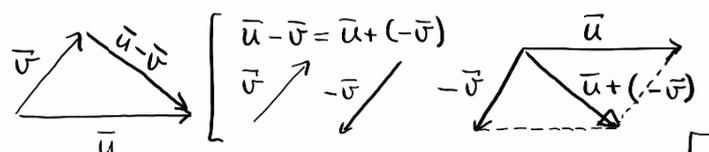
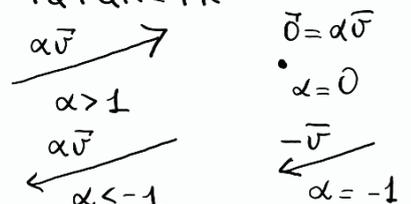
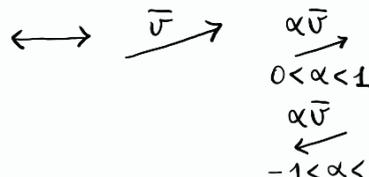


Regola del parallelogrammo



Regola punta-coda  
 $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$

$\alpha \bar{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)$



Def: (dipendenza lineare e basi) Sia  $V$  sp. vett.,  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N \in V$  ( $N \in \mathbb{N}$ ).

•  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$  sono linearmente indipendenti se vale la doppia implicazione

$$\underbrace{\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_N \vec{v}_N}_{\text{"Combinazione lineare"}} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0} \text{ con } \alpha_i \in \mathbb{R} \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_N = 0.$$

"Combinazione lineare" di  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N \in V$  con coefficienti  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$

- Una base di  $V$  è una famiglia minimale di vettori lin. indep.  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$  (i.e.,  $\forall \vec{w} \in V$  i vettori  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, \vec{w}$  sono lin. dipendenti)  $\rightarrow$  ist. di riferimento
- La dimensione di  $V$  è il numero di elementi di una base di  $V$  (NB: la dimensione è una proprietà intrinseca: non dipende dalla base scelta)

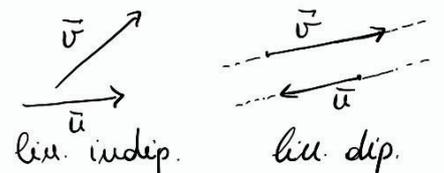
Proposizione: Sia  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d\}$  una base di  $V$ . Allora

$$\forall \vec{v} \in V \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d \text{ t.c. } \vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_d \vec{e}_d = \sum_{i=1}^d \alpha_i \vec{e}_i$$

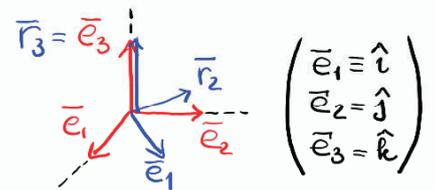
OSS: Questa proposizione stabilisce una corrispondenza biunivoca  $\vec{v} \in V \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$  che rispetta le operazioni di somma e prodotto per scalare  $\Rightarrow$  tutti gli sp. vett. con la stessa dimensione sono isomorfi  $V \leftrightarrow \mathbb{R}^d \leftrightarrow W$

Esempio:  $V = \mathbb{R}^3$

- $\vec{u}, \vec{v}$  lin. indep.  $\iff \vec{u}, \vec{v}$  non paralleli
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  lin. indep.  $\iff \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  non complanari
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$  sempre lin. dip.  $\iff \dim(\mathbb{R}^3) = 3$



- base canonica:  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- base rotata:  $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Def (prodotto scalare e ortogonalità) Sia  $V$  uno sp. vett.:

- Un prodotto scalare (o prodotto interno) su  $V$  è una mappa  $\cdot: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  T.c.
  - 1)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  (simmetria)
  - 2)  $(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{w}) + \beta (\vec{v} \cdot \vec{w})$  (linearità)
  - 3)  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ , con  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$  se e solo se  $\vec{u} = \vec{0}$  (positività, non-degenerazione).
- Il modulo (o norma) di un vettore  $\vec{u} \in V$  è  $|\vec{u}| \equiv \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$
- Due vettori  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  sono ortogonali se  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  (scriveremo  $\vec{u} \perp \vec{v}$ )  
ortonormali se  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  e  $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$  ( $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ ).
- Uno spazio Euclideo è una coppia  $(V, \cdot)$ , in cui  $V$  è sp. vett. e  $\cdot$  è prod. sc. su  $V$ .
- La proiezione ortogonale lungo un vettore  $\vec{u} \in V$  fissato è la mappa

$$\Pi_{\vec{u}}: V \rightarrow V, \quad \Pi_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$$

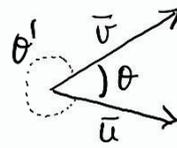
Proposizione (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz): Sia  $(V, \cdot)$  sp. Euclideo. Allora

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}| \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$$

OSS: La proiezione è sempre più corta del vettore:  $|\Pi_{\vec{u}} \vec{v}| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \leq \frac{|\vec{v}| |\vec{u}|}{|\vec{u}|} = |\vec{v}|$  3

Esempio: (Prodotto canonico in  $\mathbb{R}^3$ )

• :  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$   
 1.1:  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad |\bar{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$  (Pitagora)



$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| |\bar{v}| \cos \theta$   
 $\theta = \text{angolo compreso}$   
 $(\cos \theta = \cos(2\pi - \theta) = \cos \theta')$

OSS:  $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v}$

OSS: base canonica formata da vettori ortonormali  $\rightarrow$  base ortonormale (b.o.n.)

$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$  (delta di Kronecker),  $|\bar{e}_i| = 1$ .

Esempio: Consideriamo lo spazio Euclideo  $\mathcal{E}^3 := (\mathbb{R}^3, \cdot)$ .

$\bar{u} = (3 \ 4 \ 0), \bar{v} = (1 \ 1 \ \sqrt{2}) \rightarrow \Pi_{\bar{u}} \bar{v}, \Pi_{\bar{v}} \bar{u} = ?$

$|\bar{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$   
 $|\bar{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = 2,$   
 $\bar{u} \cdot \bar{v} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{2} = 7$

$\Rightarrow \Pi_{\bar{u}} \bar{v} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{|\bar{u}|} \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{7}{5} \frac{1}{5} (3 \ 4 \ 0) = \left(\frac{21}{25}, \frac{28}{25}, 0\right)$   
 $\Pi_{\bar{v}} \bar{u} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|} \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{7}{2} \frac{1}{2} (1 \ 1 \ \sqrt{2}) = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}, \frac{7\sqrt{2}}{4}\right)$

**Esercizio:**  
 Verificare  
 $|\Pi_{\bar{u}} \bar{v}| \leq |\bar{v}|$   
 $|\Pi_{\bar{v}} \bar{u}| \leq |\bar{u}|$

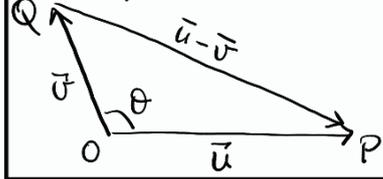
Esempio:  $\mathcal{E}^3 = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ . Le componenti  $v_i$  di un vettore  $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$  sono ottenute proiettando  $\bar{v}$  sugli elementi della base canonica

$\bar{v} \cdot \bar{e}_1 = (v_1 \ v_2 \ v_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot 0 + v_3 \cdot 0 = v_1$        $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$

$\Pi_{\bar{e}_1} \bar{v} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{e}_1}{|\bar{e}_1|} \frac{\bar{e}_1}{|\bar{e}_1|} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \bar{e}_1$

$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2 + v_3 \bar{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^3 \Pi_{\bar{e}_i} \bar{v}$

Esempio (Teorema di Carnot)



$|\bar{u} - \bar{v}|^2 = (\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}) = |\bar{u}|^2 - \bar{u} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \bar{u} + |\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2|\bar{u}||\bar{v}| \cos \theta$   
 $\Rightarrow |\overline{PQ}|^2 = |\overline{OP}|^2 + |\overline{OQ}|^2 - 2|\overline{OP}||\overline{OQ}| \cos \theta$

**Esercizio:**  $\overline{OP} = (1, 0, 2), \overline{OQ} = (3, -2, 1)$

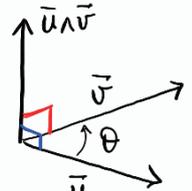
Def: Il prodotto vettoriale (o prodotto esterno) è la mappa  $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\bar{u} \wedge \bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \hat{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \hat{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \hat{k} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^3$

$= \sum_{l,m,n=1}^3 \epsilon_{lmn} u_l v_m \bar{e}_n$        $\epsilon_{lmn} = \begin{cases} +1 & (l,m,n) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \text{ permutazioni pari} \\ -1 & (l,m,n) = (1,3,2), (3,2,1), (2,1,3) \text{ permutazioni dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$   
 Simbolo di Levi-Civita

OSS:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  regole dei segni associate a permutazioni degli indici  
 $\leftrightarrow$  scelta di orientamento destro per  $\mathbb{R}^3$  (regola mano destra).

OSS: operazione strettamente 3D!  
 (si generalizza a  $\mathbb{R}^d$  con  $d \geq 1 \rightarrow$  algebre esterne di Grassmann).

OSS:  Dati  $\bar{u}, \bar{v}$  lin. indep.,  $\bar{u} \wedge \bar{v}$  è il vettore t.c.:  
 • direzione  $\perp$  piano generato da  $\bar{u}, \bar{v}$ :  $\bar{u} \wedge \bar{v} \perp \bar{u}, \bar{v} \Leftrightarrow (\bar{u} \wedge \bar{v}) \cdot \bar{u} = 0$   
 $(\bar{u} \wedge \bar{v}) \cdot \bar{v} = 0$   
 • verso t.c.  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \wedge \bar{v}$  è una terna destra  
 • modulo  $|\bar{u} \wedge \bar{v}| = |\bar{u}| |\bar{v}| \sin \theta$  con  $\theta =$  angolo compreso tra  $\bar{u}, \bar{v}$

OSS: la base canonica  $\bar{e}_1 = \hat{i}, \bar{e}_2 = \hat{j}, \bar{e}_3 = \hat{k}$  (con ordinata) è una triade destra.

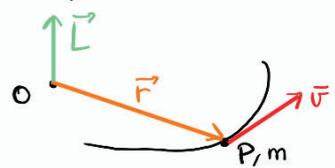
$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j}$

OSS:  $\bar{u} \wedge \bar{v} = \bar{0} \iff \bar{u} \parallel \bar{v} \iff \bar{u}, \bar{v}$  lin. dipendenti

- Proposizione:
- $\bar{u} \wedge \bar{v} = -\bar{v} \wedge \bar{u}$  (antisimmetria)
  - $(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) \wedge \bar{w} = \alpha (\bar{u} \wedge \bar{w}) + \beta (\bar{v} \wedge \bar{w})$  (bilinearità)
  - $\bar{u} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{w}) \bar{v} - (\bar{u} \cdot \bar{v}) \bar{w} \rightarrow$  NB:  $\bar{u} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{w}) \neq (\bar{u} \wedge \bar{v}) \wedge \bar{w}$   
 $(\bar{u} \wedge \bar{v}) \wedge \bar{w} = (\bar{u} \cdot \bar{w}) \bar{v} - (\bar{v} \cdot \bar{w}) \bar{u}$  (NON vale l'associatività)
  - $\bar{u} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{w}) + \bar{v} \wedge (\bar{w} \wedge \bar{u}) + \bar{w} \wedge (\bar{u} \wedge \bar{v}) = \bar{0}$  (identità di Jacobi)

Esercizio: verificare (1-4)  
 Suggerimento:  $\epsilon_{emn} = \epsilon_{mne} = -\epsilon_{men}, \sum_e \epsilon_{emn} \epsilon_{epq} = \delta_{mp} \delta_{nq} - \delta_{mq} \delta_{np}$

Esempio: Momento angolare rispetto a un polo

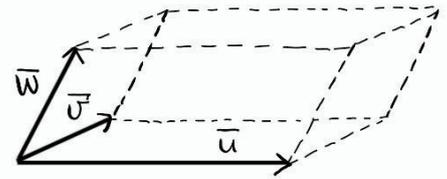


$P =$  punto materiale di massa  $m$   
 $\overline{OP} = \vec{r} =$  vettore posizione  
 $\vec{v} =$  velocità istantanea di  $P$

$\Rightarrow \vec{L}_O = \vec{r} \wedge m \vec{v}$

Def: il prodotto misto è la mappa  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \bar{u} \cdot (\bar{v} \wedge \bar{w}) \in \mathbb{R}$

OSS:  $\bar{u} \cdot (\bar{v} \wedge \bar{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$  volume con segno del parallelepipedo con spigoli  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$



OSS:  $\bar{u} \cdot (\bar{v} \wedge \bar{w}) = \bar{v} \cdot (\bar{w} \wedge \bar{u}) = \bar{w} \cdot (\bar{u} \wedge \bar{v})$  (ciclicità)

OSS:  $|\bar{u} \cdot (\bar{v} \wedge \bar{w})| = |\text{volume parallelepipedo}| \rightarrow$  non dipende da ordinamento (ordinamento può cambiare solo il segno)

OSS:  $\bar{u} \cdot (\bar{v} \wedge \bar{w}) = 0 \iff \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  complanari  $\iff \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  lin. dipendenti.

Def: Una applicazione lineare su uno sp. vett.  $V$  è una mappa  $L: V \rightarrow V$  t.c.

$L(\alpha \bar{u} + \beta \bar{v}) = \alpha L\bar{u} + \beta L\bar{v} \quad (L\bar{u} \equiv L(\bar{u}))$

OSS: fissata b.o.n.  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_d\}$  in  $V \Rightarrow$  isomorfismo  $V \simeq \mathbb{R}^d, \bar{v} \simeq (v_1, \dots, v_d) =$  (componenti rispetto a bon)

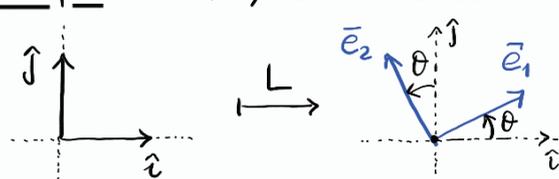
Analogamente, si ha la rappresentazione matriciale (in componenti) di  $L$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \sum_j u_j \bar{e}_j \\ \bar{v} &= \sum_k v_k \bar{e}_k \\ \bar{v} &= L\bar{u} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_i &= \bar{e}_i \cdot \bar{v} = \bar{e}_i \cdot L\bar{u} = \bar{e}_i \cdot \sum_j u_j L\bar{e}_j = \sum_j (\bar{e}_i \cdot L\bar{e}_j) u_j = \sum_j L_{ij} u_j \\ &\uparrow \text{def. componente} \quad \uparrow \text{linearità} \end{aligned} \right\}$$

$L_{ij} := \bar{e}_i \cdot L\bar{e}_j =$  matrice quadrata

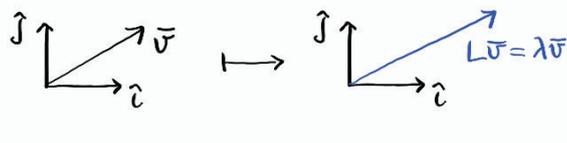
$$v_i = \sum_j L_{ij} u_j \iff \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{d1} & \dots & L_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Matrice rettangolare} \\ \text{per } L: V \rightarrow W \text{ con} \\ \text{dim } V \neq \text{dim } W. \end{array} \right)$$

Esempio:  $V = \mathbb{R}^2, L =$  rotazione in senso anti-orario di angolo  $\theta \in [0, 2\pi)$



$\bar{e}_1 = L\hat{i} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}, \quad \bar{e}_2 = L\hat{j} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$   
 $L_{11} = \hat{i} \cdot L\hat{i} = \cos\theta \quad L_{12} = \hat{i} \cdot L\hat{j} = -\sin\theta$   
 $L_{21} = \hat{j} \cdot L\hat{i} = \sin\theta \quad L_{22} = \hat{j} \cdot L\hat{j} = \cos\theta$   
 $(L_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$  (antisimmetrica)

Esempio:  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $L =$  dilatazione (contrazione) con fattore di scala  $\lambda \in \mathbb{R}$



$$L\hat{i} = \lambda\hat{i} \quad L\hat{j} = \lambda\hat{j} \quad (L_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$L_{11} = \hat{i} \cdot L\hat{i} = \lambda \quad L_{12} = \hat{i} \cdot L\hat{j} = 0$$

$$L_{21} = \hat{j} \cdot L\hat{i} = 0 \quad L_{22} = \hat{j} \cdot L\hat{j} = \lambda \quad (\text{simmetrica})$$

Esempio:  $V = \mathbb{R}^3$ , fissato  $\bar{u} \in V$  consideriamo  $L: V \rightarrow V$ ,  $L\bar{v} = \bar{u} \wedge \bar{v}$

Es: verificare linearità

$$L_{11} = \bar{e}_1 \cdot L\bar{e}_1 = \bar{e}_1 \cdot (\bar{u} \wedge \bar{e}_1) = \bar{u} \cdot (\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_1) = 0$$

ciclicità  $\uparrow$

$$L_{21} = \bar{e}_2 \cdot L\bar{e}_1 = \bar{e}_2 \cdot (\bar{u} \wedge \bar{e}_1) = \bar{u} \cdot (\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2) = \bar{u} \cdot \bar{e}_3 = u_3$$

$$L_{31} = \bar{e}_3 \cdot L\bar{e}_1 = \bar{e}_3 \cdot (\bar{u} \wedge \bar{e}_1) = \bar{u} \cdot (\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_3) = \bar{u} \cdot (-\bar{e}_2) = -u_2$$

$$\Rightarrow (L_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(antisimmetrica)

Es: completare il calcolo delle altre componenti

Def (Applicazione trasposta) Sia  $(V, \cdot)$  sp. Euclideo e  $L: V \rightarrow V$  opp. lin. La trasposta di  $L$  rispetto al prodotto  $\cdot$  è l'opp. lin.  $L^T: V \rightarrow V$  T.c.

$$\bar{u} \cdot L\bar{v} = L^T\bar{u} \cdot \bar{v} \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in V.$$

$L$  è simmetrica rispetto a  $\cdot$  se  $L^T = L$ .

$L$  è antisimmetrica rispetto a  $\cdot$  se  $L^T = -L$ .

Oss: La rappresentazione matriciale di  $L^T$  è data da

$$(L^T)_{ij} = \bar{e}_i \cdot L^T\bar{e}_j = (L^T\bar{e}_j) \cdot \bar{e}_i = \bar{e}_j \cdot L\bar{e}_i = L_{ji} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Si scambiano le componenti} \\ \text{della matrice rispetto alla} \\ \text{diagonale principale} \end{array} \right)$$

$\uparrow$  simmetria mod. int.       $\uparrow$  def.  $L^T$

Def (Trasformazioni ortogonali) Sia  $(V, \cdot)$  uno spazio Euclideo. Un'opp. lineare  $L: V \rightarrow V$  è detta trasformazione ortogonale se preserva i prodotti scalari, cioè se

$$(L\bar{u}) \cdot (L\bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{v} \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$$

Oss:  $L$  ortogonale  $\Leftrightarrow L^T L = L L^T = \mathbb{1}$  (identità)  $\Leftrightarrow L^T = L^{-1}$  applicazione inversa.

Le stesse implicazioni sono vere per le rappresentazioni matriciali

Regola di Binet  $\Rightarrow 1 = \det \mathbb{1} = \det(LL^T) = (\det L) \cdot (\det L^T) = (\det L)^2 \Rightarrow \det L = \pm 1$

$\det L = 1 \rightarrow$  trasformazione che preserva orientazione  $\rightarrow$  rotazione

$\det L = -1 \rightarrow$  trasformazione che cambia orientazione  $\rightarrow$  rotazione + riflessione

Esempio: Trasformazioni ortogonali nel piano

Idea:  $L$  ortogonale  $\Leftrightarrow L =$  rotazione o  $L =$  rotazione + riflessione

$$\text{Dimostrazione: } L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} = L^T L = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+c^2=1 & \Leftrightarrow 1^{\text{a}} \text{ colonna} \equiv \text{vettore con modulo unitario} \\ b^2+d^2=1 & \Leftrightarrow 2^{\text{a}} \text{ colonna} \equiv \text{vettore con modulo unitario} \\ ab+cd=0 & \Leftrightarrow (1^{\text{a}} \text{ colonna}) \cdot (2^{\text{a}} \text{ colonna}) = 0 \Leftrightarrow 1^{\text{a}} \text{ colonna} \perp 2^{\text{a}} \text{ colonna} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \cos\theta, \quad c = \sin\theta \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi)$$

$$b = \cos\phi, \quad d = \sin\phi \quad \text{con } \phi \in [0, 2\pi)$$

$$0 = ab+cd = \cos\theta \cos\phi + \sin\theta \sin\phi = \cos(\theta-\phi) \Rightarrow \theta-\phi = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

• k dispari:  $a = \cos\theta, \quad b = \cos(\theta - \frac{\pi}{2} - k\pi) = -\sin\theta,$   
 $c = \sin\theta, \quad d = \sin(\theta - \frac{\pi}{2} - k\pi) = \cos\theta, \quad \Rightarrow L = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{rotazione } \theta \\ \text{di angolo } \theta \end{pmatrix}$

• le pari:  $a = \cos\theta$ ,  $b = \cos(\theta - \frac{\pi}{2} - k\pi) = \sin\theta$ ,  $\Rightarrow L = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$   
 $c = \sin\theta$ ,  $d = \sin(\theta - \frac{\pi}{2} - k\pi) = -\cos\theta$

$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{rotazione } \theta \\ \text{di angolo } \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{riflessione} \\ \text{risp. asse } x \end{pmatrix}$

Def (Autovettori e autovalori) Sia  $V$  sp. vett. e  $L: V \rightarrow V$  opp. lin. Un vettore  $\bar{v} \in V$  ( $\bar{v} \neq \bar{0}$ ) è detto autovettore di  $L$  se

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } L\bar{v} = \lambda\bar{v}$$

$\lambda$  è detto autovalore di  $L$  relativo a  $\bar{v}$ .

oss:  $\bar{v}$  autovettore di  $L \Leftrightarrow L\bar{v}$  e  $\bar{v}$  stessa direzione (moduli e/o versi diversi se  $\lambda \neq 1$ )

$\hookrightarrow$  gli autovettori identificano direzioni "privilegiate" per opp. lineare  $L$  (azione di  $L$  si riduce a prodotto per uno scalare).

oss: in generale non è detto che esistano autovettori:

potrebbero non esistere (es:  $L = \text{rotazione}$ );

potrebbe esistere più di uno con stesso autovalore (es:  $L = \text{identità}$ ).

Proposizione: Sia  $(V, \cdot)$  sp. Euclideo e  $L: V \rightarrow V$  opp. lin. simmetrica (rispetto a  $\cdot$ ).

Allora, autovettori di  $L$  con autovalori diversi sono ortogonali:

$$L\bar{v}_1 = \lambda_1\bar{v}_1, L\bar{v}_2 = \lambda_2\bar{v}_2 \text{ con } \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \bar{v}_1 \perp \bar{v}_2 \quad \text{NON vale il viceversa}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{dimo: } \bar{v}_2 \cdot L\bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 \\ \bar{v}_1 \cdot L\bar{v}_2 = \lambda_2 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{v}_2 \cdot L\bar{v}_1 - \bar{v}_1 \cdot L\bar{v}_2 = \bar{v}_2 \cdot L\bar{v}_1 - L\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 = L^T \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 - L\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 = 0 \\ \stackrel{!}{=} \lambda_1 \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 - \lambda_2 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 \text{ con } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \Rightarrow \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \bar{v}_2 \perp \bar{v}_1 \end{array} \right. \quad \square$$

Teorema spettrale: Sia  $(V, \cdot)$  sp. Euclideo e  $L: V \rightarrow V$  opp. lin. simmetrica (rispetto a  $\cdot$ ).

Allora  $\exists \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_d\}$  b.o.n. di  $V$  formata da autovettori di  $L$ :

$$\bar{b}_i \cdot \bar{b}_j = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad L\bar{b}_i = \lambda_i \bar{b}_i \quad \forall i, j \in \{1, \dots, d\}$$

oss: la matrice rappresentativa di  $L$  rispetto alla base  $\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_d\}$  è diagonale

$$L_{ij} = \bar{b}_i \cdot L\bar{b}_j = \bar{b}_i \cdot (\lambda_j \bar{b}_j) = \lambda_j (\bar{b}_i \cdot \bar{b}_j) = \lambda_j \delta_{ij} \Rightarrow (L_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_d \end{pmatrix}$$

Quindi:  $L$  simmetrica  $\Rightarrow L$  diagonalizzabile

oss: Risultato fondamentale che useremo quando si parlerà di

Tensori di inerzia e di piccole oscillazioni.

oss: Non tutte le matrici diagonalizzabili sono simmetriche.

Esempio: Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

NB:  $L$  è la matrice che rappresenta rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$  una opp. lin. simmetrica rispetto al prodotto scalare standard.

$$\text{Autovalori: } 0 = \det(L - \lambda \mathbb{1}) = \det \left[ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 - (1-\lambda)(-1)(-1) - 3 \cdot 3 \cdot (1-\lambda) - 0 = (1-\lambda)[(\lambda+2)(\lambda-1) - 10]$$

$$= (1-\lambda)[\lambda^2 + \lambda - 12] \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-12)}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -4$$

Autovettori:  $L\bar{b}_1 = \lambda_1\bar{b}_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=x \\ 3x-2y-z=y \\ -y+z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y=0 \\ z=3x \end{cases} \Leftrightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 3x \end{pmatrix}$

$$|\bar{v}_1| = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2|x| \Rightarrow \bar{b}_1 = \frac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|} = \pm \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$L\bar{b}_2 = \lambda_2\bar{b}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=3x \\ 3x-2y-z=3y \\ -y+z=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y/2 \\ y \in \mathbb{R} \\ z=-y/2 \end{cases} \Leftrightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3y/2 \\ y \\ -y/2 \end{pmatrix}$

$$|\bar{v}_2| = \sqrt{\frac{9}{4}y^2 + y^2 + \frac{1}{4}y^2} = \sqrt{\frac{7}{2}}|y| \Rightarrow \bar{b}_2 = \frac{\bar{v}_2}{|\bar{v}_2|} = \pm \sqrt{\frac{2}{7}} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$L\bar{b}_3 = \lambda_3\bar{b}_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=-4x \\ 3x-2y-z=-4y \\ -y+z=-4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y/5 \\ y \in \mathbb{R} \\ z=y/5 \end{cases} \Leftrightarrow \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} -3y/5 \\ y \\ y/5 \end{pmatrix}$

$$|\bar{v}_3| = \sqrt{\frac{9}{25}y^2 + y^2 + \frac{1}{25}y^2} = \sqrt{\frac{7}{5}}|y| \Rightarrow \bar{b}_3 = \frac{\bar{v}_3}{|\bar{v}_3|} = \pm \sqrt{\frac{5}{7}} \begin{pmatrix} -3/5 \\ 1 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

Esercizio: verificare che  $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$  sono ortogonali

Esempio: Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$L = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \theta \in [0, 2\pi) \setminus \{\pi\} \quad (\theta \neq 0, \pi)$$

Esercizio: svolgere per  $\theta=0$  e  $\theta=\pi$

Autovalori:  $0 = \det(L - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)[(\cos\theta - \lambda)^2 + (\sin\theta)^2]$

$\Rightarrow$  unico autovalore (reale)  $\lambda = 2$  (altri complessi)

Autovettori:  $L\bar{b} = \lambda\bar{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos\theta)x - (\sin\theta)z = 0 \\ 2y = 2y \\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\bar{v}| = |y| \Rightarrow \bar{b} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

OSS: Ragionando sulla forma di  $L$  si può dedurre che  $L$  rappresenta una dilatazione (con coeff. 2) nella direzione  $y$  ed una rotazione (di angolo  $\theta$ ) nel piano  $\langle x, z \rangle$ . Quindi, ci si poteva aspettare a priori che non ci fossero direzioni lasciate invariate nel piano  $\langle x, z \rangle$  e che l'unica direzione privilegiata per  $L$  fosse  $y$ .

Esercizio: Determinare autovalori e autovettori della matrice

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Stabilire se rappresenta un prodotto scalare in  $\mathbb{R}^3$ .

Esercizio: Al variare di  $t \in \mathbb{R}$ , determinare autovalori e autovettori della matrice

$$L = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

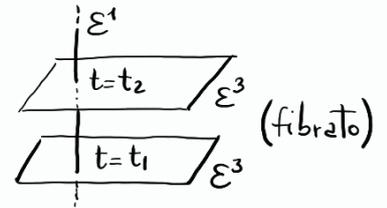
Per quali  $t \in \mathbb{R}$ ,  $L$  rappresenta un prodotto scalare in  $\mathbb{R}^3$ .

### 3.1) CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE

Una delle ipotesi fondamentali della Meccanica Classica è l'esistenza di un tempo assoluto ed uno spazio assoluto, in cui avvengono gli eventi fisici.

Questi concetti "primitivi" vengono formalizzati a livello matematico con la seguente definizione.

Def: Lo spazio-Tempo Newtoniano è il prodotto  
 $\mathcal{E}^1 \times \mathcal{E}^3 = (\text{sp. affine Euclideo 1D}) \times (\text{sp. affine Euclideo 3D})$   
 = tempo  $\times$  spazio



Un evento è un elemento dello spazio-Tempo, cioè una coppia  $(t, P) \in \mathcal{E}^1 \times \mathcal{E}^3$

OSS: Spazio e tempo assoluti sono idealizzazioni matematiche che vengono postulate a priori. Esito della meccanica classica indagare la loro natura.

OSS: Viene incorporata nella definizione l'ipotesi fondamentale di invarianza suggerita dalle osservazioni sperimentali di Galileo:

le leggi della fisica sono le stesse in tutto l'universo  $\leftrightarrow$  non esistono punti privilegiati  $\leftrightarrow$  strutture di sp. affine

OSS: È sempre possibile fissare il "tempo zero" (origine dei tempi) come il momento in cui si fa partire l'orologio in un dato esperimento. Il verso naturale per la retta temporale è quello dettato dalla termodinamica: passato  $\rightarrow$  futuro  
 $\Rightarrow \mathcal{E}^1 \simeq \mathbb{R}$

Def: Un sistema di riferimento è una qualsiasi coppia  $(\theta, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$  formata da:

- un punto  $\theta \in \mathcal{E}^3 =$  origine;
- una base ortogonale (destra)  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  di  $\mathbb{R}^3$ .

OSS: fissare un sistema di riferimento permette di passare dallo spazio affine  $\mathcal{E}^3$  allo sp. vettoriale  $\mathbb{R}^3$  tramite la mappa

$$P \in \mathcal{E}^3 \mapsto \vec{OP} = \sum_{i=1}^3 x_i \bar{e}_i \simeq (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Def: Lo spazio delle configurazioni associato ad un sistema meccanico è l'insieme delle possibili "posizioni" assunte dal sistema al variare del tempo.

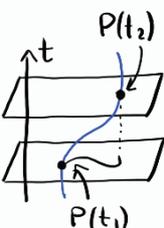
Def: Un punto materiale è un sistema meccanico il cui spazio delle config. è tutto lo sp. affine  $\mathcal{E}^3$ .

OSS: Anche in questo caso, la definizione data formalizza un'idealizzazione matematica, giustificata da opportune approssimazioni fisiche (contestualità).  
 $\rightarrow$  Le dimensioni del sistema considerato devono essere trascurabili rispetto alle altre lunghezze caratteristiche coinvolte.

Esempi: • mela in caduta dall'albero:  $r_m \sim 10 \text{ cm}$ ,  $h_e \sim 10 \text{ m} \Rightarrow r_m/h_e \sim 10^{-2}$   
 • pianeta in orbita:  $r_p \sim 10^4 \text{ km}$ ,  $d_o \sim 10^8 \text{ km} \Rightarrow r_p/d_o \sim 10^{-4}$

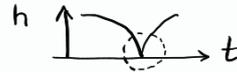
Def: Il moto di un punto materiale è una funzione  $t \in \mathbb{R} \rightarrow P(t) \in \mathcal{E}^3$  che assegna ad ogni tempo la posizione del punto.

La traiettoria del punto è l'insieme delle posizioni occupate nel tempo, cioè l'immagine della funzione moto:  $\{P(t) | t \in \mathbb{R}\} = \text{curve in } \mathcal{E}^3$ .



Oss: fissato un sist. di rif.  $(O, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ , il moto di un punto è identificato da  
 $t \in \mathbb{R} \mapsto \vec{OP}(t) = \bar{x}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \bar{e}_i \simeq (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3$

Assumeremo sempre che  $\bar{x}(t)$  sia sufficientemente regolare, e.g.,  $\bar{x} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$  (due volte differenziabile con continuità). Non sempre si tratta di una ipotesi innocua. In particolare non è verificata nel caso di collisioni/rimbalzi (in questi casi,  $\bar{x}$  è  $\mathcal{C}^2$  a tratti).



Def: Dato un punto materiale con moto  $t \mapsto P(t)$ , si definiscono le funzioni associate:

- velocità:  $t \in \mathbb{R} \mapsto \bar{v}(t) := \frac{dP(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{OP}(t+\Delta t) - \vec{OP}(t)}{\Delta t} = \dot{\bar{x}}(t) \in \mathbb{R}^3$ ;
- accelerazione:  $t \in \mathbb{R} \mapsto \bar{a}(t) := \frac{d\bar{v}(t)}{dt} = \frac{d^2P(t)}{dt^2} = \ddot{\bar{x}}(t) \in \mathbb{R}^3$ .

Oss:  $P(t) \in \mathcal{E}^3$  è un punto nello sp. affine,  $\bar{v}(t), \bar{a}(t) \in \mathbb{R}^3$  sono vettori.

Oss: Note l'accelerazione (velocità) ad ogni tempo e la velocità (posizione) ad un tempo particolare, tramite il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene la velocità (posizione) ad ogni tempo:

$$\bar{v}(t) = \bar{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \bar{a}(t') dt', \quad P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t \bar{v}(t') dt'$$

Def: Il moto  $t \mapsto P(t)$  di un pt. materiale è detto uniforme se la velocità  $\bar{v}(t)$  associata soddisfa la condizione  $|\bar{v}(t)| = \text{costante} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

Lemma: Moto uniforme  $\Leftrightarrow \bar{v}(t) \cdot \bar{a}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{v}(t) \perp \bar{a}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

$$\boxed{\text{dim: } 0 = \frac{d}{dt} |\bar{v}|^2 = \frac{d}{dt} \bar{v} \cdot \bar{v} = \dot{\bar{v}} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \dot{\bar{v}} = 2\bar{v} \cdot \dot{\bar{v}} = 2\bar{v} \cdot \bar{a} \quad \square}$$

$\uparrow$   $|\bar{v}|$  costante      Leibnitz      simmetria prodotto scalare.  $\square$

Def: Il moto  $t \mapsto P(t)$  di un pt. materiale è detto armonico se esistono un sist. di rif.  $(O, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$  ed una costante  $\omega \in \mathbb{R}$  (frequenza) t.c.

$$\ddot{\vec{OP}}(t) + \omega^2 \vec{OP}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad \rightsquigarrow m\bar{a} = -k\bar{x}$$

Oss: In un moto armonico, il vettore posizione e l'accelerazione hanno la stessa direzione e verso opposto.

Def: Il moto  $t \mapsto P(t)$  di un pt. materiale è detto piano/rettilineo/circolare se esistono un sist. di rif.  $(O, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$  ed un piano  $\Pi$ /retta  $r$ /circonferenza  $\mathcal{C}$  t.c.

$$\vec{OP}(t), \dot{\vec{OP}}(t) \in \Pi / r / \mathcal{C} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lemma: Moto armonico  $\Rightarrow$  moto piano

$$\boxed{\text{dim: } \frac{d}{dt} [\bar{x}(t) \wedge \dot{\bar{x}}(t)] = \dot{\bar{x}} \wedge \dot{\bar{x}} + \bar{x} \wedge \ddot{\bar{x}} = \bar{x} \wedge (-\omega^2 \bar{x}) = -\omega^2 \bar{x} \wedge \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x}(t) \wedge \dot{\bar{x}}(t) = \text{costante} = \bar{n} \in \mathbb{R}^3}$$

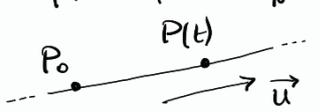
$\uparrow$  Leibnitz       $\uparrow$  moto armonico

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \bar{x}(t) \cdot \bar{n} &= \bar{x} \cdot (\bar{x} \wedge \dot{\bar{x}}) = \dot{\bar{x}} \wedge (\bar{x} \wedge \bar{x}) = 0 \\ \dot{\bar{x}}(t) \cdot \bar{n} &= \dot{\bar{x}} \cdot (\bar{x} \wedge \dot{\bar{x}}) = \bar{x} \wedge (\dot{\bar{x}} \wedge \dot{\bar{x}}) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t) \in (\text{piano} \perp \bar{n}) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \square$$

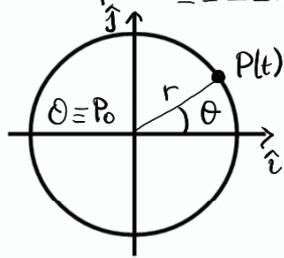
Oss: Non vale l'implicazione inversa: moto piano  $\not\Rightarrow$  moto armonico

Es: moto rettilineo uniforme è piano, ma non è armonico

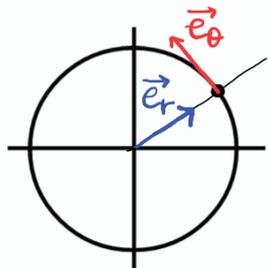
Esempio: Moto stazionario (quiete):  $P(t) = P_0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{v}(t) = \bar{a}(t) = \vec{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$   
 Anche detto "assenza di moto", ma il punto materiale "si muove" lungo una curva nello spazio-tempo.

Esempio: Moto rettilineo:  $\exists P_0 \in \mathcal{E}^3, \bar{u} \in \mathbb{R}^3, f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  t.c.  $P(t) = P_0 + f(t)\bar{u}$  (retta affine)  
 $\Rightarrow \bar{x}(t) = \overline{OP}(t) = \overline{OP}_0 + f(t)\bar{u} = \bar{x}_0 + f(t)\bar{u}$   
 $\Rightarrow \bar{v}(t) = \dot{\bar{x}}(t) = \dot{f}(t)\bar{u}, \quad \bar{a}(t) = \ddot{\bar{x}}(t) = \ddot{f}(t)\bar{u} \Rightarrow \bar{v}(t), \bar{a}(t) \parallel \bar{u} \quad \forall t$   
  
 • Moto rettilineo uniforme  $\Leftrightarrow$  rettilineo +  $|\bar{v}(t)| = \text{costante} \Leftrightarrow \dot{f}(t) = v_0 = \text{costante} \quad \forall t \in \mathbb{R}$   
 $\Leftrightarrow \ddot{f}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \bar{a}(t) = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow f(t) = f_0 + v_0 t \quad \Leftrightarrow \bar{x}(t) = (\bar{x}_0 + f_0 \bar{u}) + v_0 \bar{u} t = \bar{x}'_0 + \bar{v}_0 t$

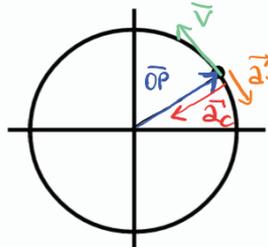
Esempio: Moto circolare = moto piano per cui  $\exists P_0 \in \mathcal{E}^3, r > 0$  costante t.c.  $|\overline{OP}(t)| = r \quad \forall t \in \mathbb{R}$   
 Trattandosi di un moto piano, si può fissare un sist. di rif.  $(\theta, \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\})$  t.c.  $\theta = \theta_0, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  sono fissi e il piano del moto  $\hat{e} \perp \hat{k}$ .



$\overline{OP} = \bar{x}(t) = (r \cos \theta(t))\hat{i} + (r \sin \theta(t))\hat{j} = r[\cos \theta(t)\hat{i} + \sin \theta(t)\hat{j}], \quad \theta \in \mathcal{C}^2(S^1)$   
 $\bar{v}(t) = \dot{\bar{x}}(t) = -r\dot{\theta} \sin \theta \hat{i} + r\dot{\theta} \cos \theta \hat{j} = r\dot{\theta}[-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}]$   
 $\bar{a}(t) = \ddot{\bar{x}}(t) = r\ddot{\theta}[-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}] - r\dot{\theta}^2[\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}]$



Consideriamo un nuovo sist. di rif.  $(\theta, \{\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \hat{k}\})$  con  
 $\bar{e}_r = \bar{e}_r(t) = \cos \theta(t)\hat{i} + \sin \theta(t)\hat{j} \rightarrow$  vettore radiale  $\left. \begin{array}{l} \text{dipendenti dal} \\ \text{tempo} \end{array} \right\}$   
 $\bar{e}_\theta = \bar{e}_\theta(t) = -\sin \theta(t)\hat{i} + \cos \theta(t)\hat{j} \rightarrow$  vettore angolare  
 OSS:  $|\bar{e}_r(t)| = |\bar{e}_\theta(t)| = 1, \quad \bar{e}_r(t) \cdot \bar{e}_\theta(t) = \bar{e}_r(t) \cdot \hat{k} = \bar{e}_\theta(t) \cdot \hat{k} = 0$   
 $\Rightarrow \{\bar{e}_r(t), \bar{e}_\theta(t), \hat{k}\} = \text{bon di } \mathbb{R}^3 \quad \forall t \in \mathbb{R} \rightarrow$  sist. di rif. cilindrico mobile.



OSS:  $\dot{\bar{e}}_r(t) = (-\sin \theta)\dot{\theta}\hat{i} + (\cos \theta)\dot{\theta}\hat{j} = \dot{\theta}(t)\bar{e}_\theta(t)$   
 $\dot{\bar{e}}_\theta(t) = (-\cos \theta)\dot{\theta}\hat{i} + (-\sin \theta)\dot{\theta}\hat{j} = -\dot{\theta}(t)\bar{e}_r(t) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \dot{\bar{e}}_r = \dot{\theta} \bar{e}_\theta \\ \dot{\bar{e}}_\theta = -\dot{\theta} \bar{e}_r \end{array}}$

OSS:  $\overline{OP}(t) = \bar{x}(t) = r \bar{e}_r(t)$   
 $\bar{v}(t) = \dot{\bar{x}}(t) = r \dot{\theta}(t) \bar{e}_\theta(t) = \text{velocità tangenziale}$   
 $\bar{a}(t) = \ddot{\bar{x}}(t) = \underbrace{r \ddot{\theta}(t) \bar{e}_\theta(t)}_{\text{accelerazione tangenziale}} + \underbrace{(-r \dot{\theta}^2(t) \bar{e}_r(t))}_{\text{accelerazione centripeta}} = \bar{a}_T(t) + \bar{a}_C(t)$

• Moto circolare uniforme:  $|\bar{v}(t)| = \text{costante} \Leftrightarrow \dot{\theta}(t) = \text{costante} = \omega \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}$   
 $\Leftrightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega t, \quad \ddot{\theta}(t) = 0$   
 $\Rightarrow \bar{x}(t) = r \bar{e}_r(t) = r \cos(\theta_0 + \omega t)\hat{i} + r \sin(\theta_0 + \omega t)\hat{j}$   
 $\bar{v}(t) = r\omega \bar{e}_\theta(t), \quad \bar{a}(t) = \bar{a}_C(t) = -r\omega^2 \bar{e}_r(t) = -\omega^2 \bar{x}(t)$  *sempre centripeta / moto armonico*  
 $\Rightarrow \bar{v}(t) \cdot \bar{a}(t) = (r\omega \bar{e}_\theta) \cdot (-r\omega^2 \bar{e}_r) = -r^3 \omega^3 \bar{e}_\theta \cdot \bar{e}_r = 0 \Rightarrow \bar{v}(t) \perp \bar{a}(t)$

Sistema di riferimento intrinseco - terna di Frenet

Si consideri il moto  $t \in \mathbb{R} \mapsto P(t) \in \mathcal{E}^3$  di un punto materiale e sia  $t \in \mathbb{R} \mapsto \bar{v}(t) \in \mathbb{R}^3$  la velocità associata.

Def: Il moto è detto regolare se: •  $t \mapsto P(t)$  è iniettiva ( $t_1 \neq t_2 \Rightarrow P(t_1) \neq P(t_2)$ );  
 •  $|\bar{v}(t)| \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

OSS: Non sono regolari i moti con traiettorie chiuse e quelli in cui il punto si ferma.

Def: Dato un moto regolare  $t \mapsto P(t)$ , l'ascissa curvilinea (lunghezza della traiettoria) è  
 $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(t) := \int_{t_0}^t |\bar{v}(t')| dt' \quad (t_0 \in \mathbb{R} \text{ fisso}).$

OSS:  $s(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^N |\bar{v}(t_0 + n\Delta t)| \Delta t = \lim \sum_n \Delta s_n$

OSS: moto regolare + teo calcolo integrale  $\Rightarrow \dot{s}(t) = |\bar{v}(t)| > 0$  }  $\Rightarrow$   $\exists$  funzione inversa  
 Teorema della funzione inversa }  $s \mapsto t(s)$   
 detta legge oraria

$\Rightarrow$  Si può usare l'ascissa curvilinea per parametrizzare la traiettoria  $P(s) \equiv P(t(s))$ .

Def: Sia  $P(s)$  la parametrizzazione del moto con ascissa curvilinea. Si definiscono:

- versore tangente:  $\hat{T}(s) = \frac{dP(s)}{ds} = \frac{\bar{v}(s)}{|\bar{v}(s)|}$
- versore normale:  $\hat{N}(s) = \frac{d\hat{T}(s)/ds}{|d\hat{T}(s)/ds|} = \frac{\hat{T}'(s)}{|\hat{T}'(s)|}$
- versore binormale:  $\hat{B}(s) = \hat{T}(s) \wedge \hat{N}(s)$

Terna di Frenet  
 (terna intrinseca,  
 triedo principale)

OSS:  $|\hat{T}(s)| = \left| \frac{dP}{ds} \cdot \frac{dt}{ds} \right| = |\bar{v} \cdot \dot{s}^{-1}| = \frac{|\bar{v}|}{|\dot{s}|} = 1 \rightarrow \hat{T}(s) \text{ versore}$   
 $\uparrow$  derivata funzione composta.

$\hat{T}(s) \cdot \hat{N}(s) = \hat{T}(s) \cdot \frac{\hat{T}'(s)}{|\hat{T}'(s)|} = \frac{1}{2|\hat{T}'(s)|} \frac{d}{ds} |\hat{T}|^2 = 0 \rightarrow \hat{N}(s) \text{ versore}$   
 $\perp \hat{T}(s)$

$|\hat{B}(s)|^2 = |\hat{T} \wedge \hat{N}|^2 = (\hat{T} \wedge \hat{N}) \cdot (\hat{T} \wedge \hat{N}) = \dots = 1 \rightarrow \hat{B}(s) \text{ versore}$   
 $\perp \hat{T}(s), \hat{N}(s)$

$\{\hat{T}(s), \hat{N}(s), \hat{B}(s)\}$  terna  
 ortonormale destra  
 (diversa in ogni punto  
 della traiettoria)

Esercizio  $\uparrow$

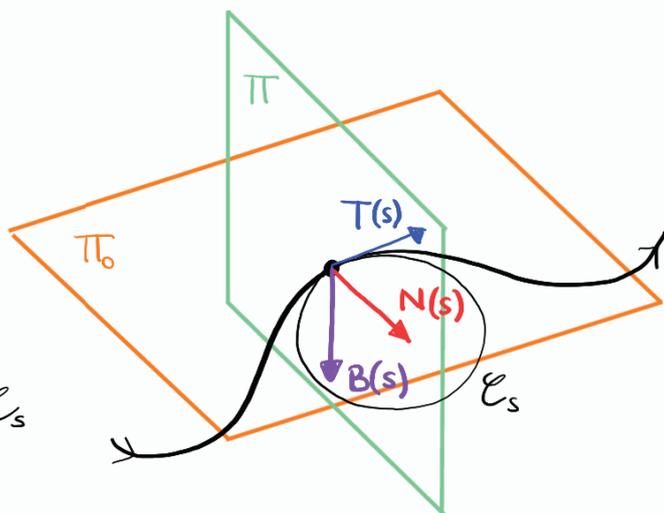
Def: Dato un moto regolare, si definiscono le seguenti grandezze:

- curvatura della traiettoria  $\kappa(s) := \left| \frac{d\hat{T}(s)}{ds} \right|$
- raggio di curvatura della traiettoria  $\rho(s) := 1/\kappa(s)$
- torsione della traiettoria  $\tau(s) := - \left| \frac{d\hat{B}(s)}{ds} \right|$

Esercizio: calcolare esplicitamente  $\kappa(s)$  in termini di  $\bar{v}(t), \bar{a}(t)$ .

OSS: Interpretazione geometrica

- $\Pi =$  piano  $\perp \hat{T}(s) =$  piano  $\perp \bar{v}(s)$
- $\mathcal{C}_s =$  circonferenza osculatrice che meglio approssima localmente in  $P(s)$  la traiettoria del punto materiale
- $\hat{N}(s)$  punta da  $P(s)$  verso il centro di  $\mathcal{C}_s$ ;
- $\rho(s) = 1/\kappa(s) =$  raggio di  $\mathcal{C}_s$ .
- $\Pi_0 =$  piano osculatore = piano in cui giace  $\mathcal{C}_s$
- $\tau(s) =$  misura di quanto la traiettoria esce dal piano  $\Pi_0$

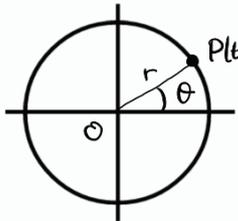


Proposizione:  $\tau(s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$  moto piano, con traiettoria che giace in  $\Pi_0$ .

Teorema (Frenet-Serret)

$$\begin{aligned} \hat{T}'(s) &= 0 + \kappa(s) \hat{N}(s) + 0 \\ \hat{N}'(s) &= -\kappa(s) \hat{T}(s) + 0 - \tau(s) \hat{B}(s) \\ \hat{B}'(s) &= 0 + \tau(s) \hat{N}(s) + 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$$

### Esempio: Moto circolare



$$\vec{OP}(t) = (r \cos \theta(t), r \sin \theta(t), 0) = r \vec{e}_r(t)$$

$$\vec{v}(t) = (-r \dot{\theta}(t) \sin \theta(t), r \dot{\theta}(t) \cos \theta(t), 0) = r \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta(t) \Rightarrow |\vec{v}(t)| = r |\dot{\theta}(t)|$$

Oss: in generale non si tratta di un moto regolare per  $t \in \mathbb{R}$ , ma è regolare in ogni intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  t.c.

$|\dot{\theta}(t)| \neq 0 \quad \forall t \in I$  e  $t \mapsto \theta(t)$  è iniettiva (mod  $2\pi$ ).

Assumendo che  $\dot{\theta}(t) = \text{costante} = \omega \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I$  e  $\theta(t_0) = 0$ , l'asse curvilineo è

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{v}(t')| dt' = \int_{t_0}^t r \omega dt' = r \omega t \Leftrightarrow t(s) = \frac{s}{r\omega}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{r\omega}$$

La parametrizzazione con asse curvilineo è  $\vec{OP}(s) = (r \cos(\frac{s}{r}), r \sin(\frac{s}{r}), 0)$

La tripla di Frenet associata è

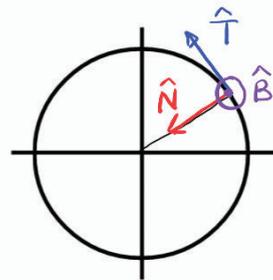
$$\hat{T}(s) = \frac{dP}{ds} = \left(-r \cdot \frac{1}{r} \sin(s/r), r \cdot \frac{1}{r} \cos(s/r), 0\right) = \vec{e}_\theta\left(\frac{s}{r}\right)$$

$$\hat{N}(s) = \frac{\hat{T}'(s)}{|\hat{T}'(s)|} = \frac{\left(-\frac{1}{r} \cos(s/r), -\frac{1}{r} \sin(s/r), 0\right)}{1/r} = -\vec{e}_r\left(\frac{s}{r}\right)$$

$$\hat{B}(s) = \hat{T}(s) \wedge \hat{N}(s) = \vec{e}_\theta \wedge (-\vec{e}_r) = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \hat{k}$$

$$\kappa(s) = |\hat{T}'(s)| = \left| \left(-\frac{1}{r} \cos(s/r), -\frac{1}{r} \sin(s/r), 0\right) \right| = \frac{1}{r} \rightarrow \rho(s) = \text{costante} = r$$

$$\tau(s) = -|\hat{B}'(s)| = 0$$



Esercizio: verificare le formule di Frenet-Serret

### Teorema (Scomposizione di velocità e accelerazione)

Sia  $P(t)$  un moto regolare,  $s(t)$  l'asse curvilineo associato e  $(\hat{T}(s(t)), \hat{N}(s(t)), \hat{B}(s(t)))$  la tripla di Frenet nel punto  $P(t)$ . Allora

$$\vec{v} = \dot{s} \hat{T}, \quad \vec{a} = \ddot{s} \hat{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{N} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \quad (\text{acc. tang.} + \text{acc. normale})$$

Oss: viene sottointesa la dipendenza temporale.

$$\text{dim: } \vec{v}(t) = \frac{dP(t)}{dt} = \frac{dP}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \hat{T} \cdot \dot{s}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\hat{T}}{dt} \dot{s} + \hat{T} \ddot{s} = \frac{d\hat{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \dot{s} + \hat{T} \ddot{s} = |\hat{T}'(s)| \hat{N} \dot{s}^2 + \hat{T} \ddot{s} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{N} + \ddot{s} \hat{T} \quad \square$$

### Esempio: Moto circolare

$$s(t) = \int_0^t |\vec{v}(t')| dt' = \int_0^t r |\dot{\theta}(t')| dt' \Rightarrow \dot{s}(t) = \pm r \dot{\theta}(t), \quad \ddot{s}(t) = \pm r \ddot{\theta}(t)$$

$$\hat{T} = \vec{e}_\theta, \quad \hat{N} = -\vec{e}_r, \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = r \Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{r \dot{\theta}}{\dot{s}} \vec{e}_\theta, \quad \vec{a}(t) = \frac{r \ddot{\theta}}{\dot{s}} \vec{e}_\theta + \frac{r \dot{\theta}^2}{\dot{s}^2 / \rho} (-\vec{e}_r)$$

### 3.2) CINEMATICA DEI CORPI RIGIDI

Consideriamo un sistema formato da  $N$  punti materiali

Def: La configurazione del sistema (ad un dato istante) è l'insieme delle posizioni occupate dai punti che lo formano

$$(P_1, \dots, P_N) \in \mathcal{E}^3 \times \dots \times \mathcal{E}^3 \simeq \mathcal{E}^{3N}$$

Def: Il moto del sistema è la funzione che descrive le posizioni dei punti che lo formano al variare del tempo:

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (P_1(t), \dots, P_N(t)) \in \mathcal{E}^{3N}$$

Oss: Fissato un sist. di rif.  $(O, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ , le posizioni dei punti sono descritte da

$$(\bar{O}P_1, \dots, \bar{O}P_N) \simeq (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$$

In generale, un sist. di  $N$  punti materiali è descritto da  $3N$  numeri reali (gradi di libertà), ma la presenza di vincoli e/o simmetrie può ridurre questo numero (anche in modo notevole).

Def: Un corpo rigido è un sistema di punti materiali  $\{P_1(t), \dots, P_N(t)\}$  se

$$\text{dist}(P_i(t), P_j(t)) = |P_j(t) - P_i(t)| = |\bar{P}_i P_j(t)| = \text{costante}(i, j) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Oss: La condizione (\*) è detta vincolo di rigidità e riduce l'insieme delle configurazioni ammissibili per il sistema.

→ quanti parametri servono per descrivere la config. di un corpo rigido?

Oss: è fondamentale l'ipotesi fatta in Meccanica Classica che lunghezze e intervalli temporali siano indipendenti dall'osservatore che li misura (questa ipotesi cade nelle teorie relativistiche e infatti non esistono corpi rigidi in Relatività Speciale/Generale).

#### Esempio: Aste rigide

• Asta rigida = sbarra ideale (1D) di lunghezza  $l$  e massa  $m$



↳ ogni corpo rigido può essere pensato come un sistema di punti materiali collegati a coppie da aste ideali (Cercignani).

• Aste incernierate



$\bar{P}_1 P_2, \bar{P}_2 P_3 =$  aste rigide

Se  $P_2$  non è un punto fisso ("incastro") la distanza tra  $P_1$  e  $P_3$  può variare. In questo caso, il sistema  $\{P_1, P_2, P_3\}$  è formato da due sottosistemi rigidi vincolati tra loro, ma non è esso stesso rigido (è un sistema articolato).

Teorema: Le posizioni e le velocità dei punti di un corpo rigido  $\mathcal{E}$  soddisfanno

$$\bar{P}Q \cdot (\bar{v}_P - \bar{v}_Q) = 0 \quad \forall P, Q \in \mathcal{E}$$

dim:  $P, Q \in \mathcal{E} \Leftrightarrow |\bar{P}Q| = \text{costante}$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{d}{dt} |\bar{P}Q|^2 = \frac{d}{dt} (\bar{P}Q \cdot \bar{P}Q) = 2 \bar{P}Q \cdot \frac{d}{dt} \bar{P}Q = 2 \bar{P}Q \cdot \frac{d}{dt} (\bar{O}Q - \bar{O}P) = 2 \bar{P}Q \cdot (\bar{v}_Q - \bar{v}_P)$$

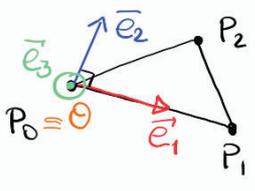
Def: Un sist. di rif.  $(O, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$  è solidale ad un corpo rigido  $\mathcal{E}$  se le posizioni dei punti di  $\mathcal{E}$  rispetto a Tale sistema non dipendono dal tempo

OSS:  $(\Theta, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$  è solidale con  $\mathcal{C}$  se e solo se le velocità rispetto ad esso dei punti di  $\mathcal{C}$  sono tutte nulle.

Teorema: Un sist. di punti è un corpo rigido  $\Leftrightarrow \exists$  sist. di rif. solidale.

dim:  $(\Leftarrow) \exists S = (\Theta, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$  solidale  $\Rightarrow$  punti del sist. in quiete rispetto ad  $S$   
 $\Rightarrow$  velocità dei punti nulle / distanze costanti nel tempo  $\Rightarrow$  corpo rigido.

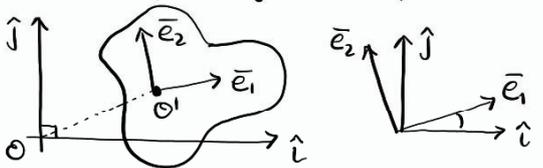
$(\Rightarrow)$  Siano  $P_0, P_1, P_2$  tre punti non allineati appartenenti al corpo rigido:



$\Theta \equiv P_0$   
 $\bar{e}_1 := \frac{\overrightarrow{P_0 P_1}}{|P_0 P_1|}$   
 $\bar{e}_2 :=$  vettore  $\perp$   $\bar{e}_1$ , opportunamente al piano individuato da  $P_0, P_1, P_2$   
 $\bar{e}_3 := \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2$

$\Rightarrow (\Theta, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$   
 è un sist. solidale

OSS: in 2D sono sufficienti 3 parametri per identificare la configurazione di un corpo rigido rispetto ad un sist. di rif. assegnato:



$\{\Theta, \hat{i}, \hat{j}\}$  sist. di rif. fisso  
 $\{\Theta', \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  sist. di rif. solidale

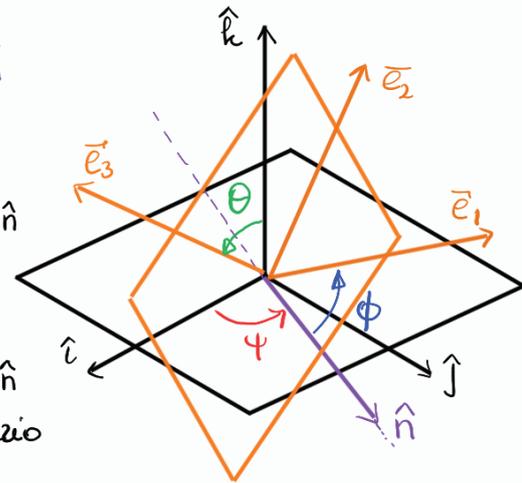
- posizione di  $\Theta'$  rispetto ad  $\Theta = \{x_0, y_0\} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow 2 \text{ gdl}$
- rotazione di  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  rispetto a  $\{\hat{i}, \hat{j}\} = \varphi \in [0, 2\pi) \rightarrow 1 \text{ gdl}$

OSS: in 3D servono 6 parametri per identificare la configurazione di un corpo rigido rispetto ad un sist. di rif. assegnato:

- a) posizioni di 3 punti  $P, Q, R$  appartenenti al corpo rigido  $\rightarrow 3 \times 3 = 9 \text{ gdl}$   
 3 vincoli di rigidità:  $|PA| = \text{cost.}, |QR| = \text{cost.}, |RP| = \text{cost.} \rightarrow -3 \text{ gdl}$  }  $\Rightarrow 6 \text{ gdl}$
- b) posizione di 1 punto  $\Theta'$  appartenente al corpo rigido  $\rightarrow 3 \text{ gdl}$   
 angoli di rotazione del sist. solidale rispetto a quello fisso  $\rightarrow 3 \text{ gdl}$  }  $\Rightarrow 6 \text{ gdl}$

Def (Angoli di Eulero) Siano  $S = (\Theta, \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\})$  un sist. di rif. fisso e  $S' = (\Theta', \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$  un sist. di rif. solidale al corpo rigido. Assumendo che  $\hat{k} \neq \bar{e}_3$ , si definiscono:

- asse dei nodi = retta ottenuta intersecando piano  $\perp \hat{k}$  con piano  $\perp \bar{e}_3$   $\leadsto \hat{n} := \frac{\hat{k} \wedge \bar{e}_3}{|\hat{k} \wedge \bar{e}_3|}$
- angolo di precessione = angolo di cui si deve rotare  $\hat{i}$  nel piano  $\perp \hat{k}$  in senso antiorario per sovrapporlo all'asse dei nodi  $\hat{n}$   
 $\psi \in [0, 2\pi)$
- angolo di nutazione = angolo compreso tra  $\hat{k}$  ed  $\bar{e}_3$ , misurato da  $\hat{k}$  verso  $\bar{e}_3$ .  
 $\theta \in [0, \pi)$
- angolo di rotazione propria = angolo di cui si deve rotare  $\hat{n}$  nel piano  $\perp \bar{e}_3$  in senso antiorario per sovrapporlo all'asse  $\bar{e}_1$ .  
 $\phi \in [0, 2\pi)$



OSS: 3 angoli  $\leftrightarrow$  3 rotazioni ordinate per portare  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  a sovrapporsi con  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

1) rotazione di  $\psi$  attorno a  $\hat{k}$   
 $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \rightarrow \{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\} = \{\hat{n}, \hat{j}', \hat{k}'\} \rightarrow R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) rotazione di  $\theta$  attorno a  $\hat{n}$   
 $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\} \rightarrow \{\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\} = \{\hat{n}, \hat{j}'', \bar{e}_3\} \rightarrow R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

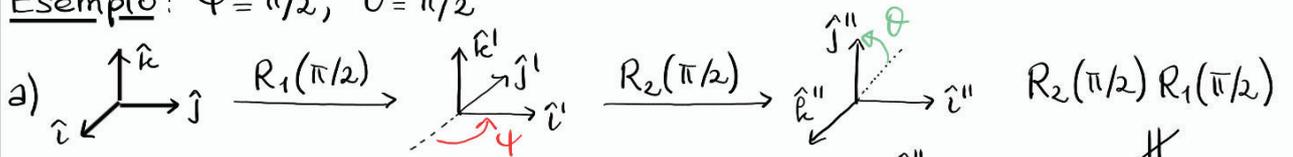
3) rotazione di  $\phi$  attorno a  $\vec{e}_3 \rightarrow R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 $\{\hat{i}''', \hat{j}''', \hat{k}'''\} \rightarrow \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

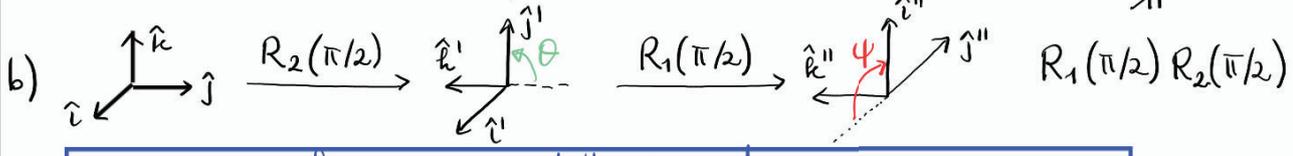
Trasformazione complessiva  $\equiv$  composizione di 3 transf. ortogonali (rotazioni)  
 $=$  trasformazione ortogonale (rotazione)

$$R_{TOT}(\phi, \theta, \psi) = R_3(\phi) R_1(\theta) R_3(\psi)$$

NB: le rotazioni attorno ad assi diversi non commutano  $\rightarrow$  ordine importante!

**Esempio:**  $\psi = \pi/2, \theta = \pi/2$

a)   $R_1(\pi/2) \rightarrow R_2(\pi/2) \rightarrow R_2(\pi/2) R_1(\pi/2)$

b)   $R_2(\pi/2) \rightarrow R_1(\pi/2) \rightarrow R_1(\pi/2) R_2(\pi/2)$

**Esercizio:** verificare con prodotto di matrici che  $R_2 R_1 \neq R_1 R_2$

OSS: un'altra scelta possibile per parametrizzare le rotazioni in 3D sono gli angoli nautici (rollio, beccheggio, imbardata).

Teorema di Poisson: Si consideri il moto di un corpo rigido e sia  $(\theta, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\})$  un sist. di rif. ortomorfo destro solidale col corpo rigido. Allora

$\forall t \in \mathbb{R}$  istante fissato  $\exists!$   $\vec{\omega}(t) \equiv \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$  velocità angolare t.c.

$$\dot{\vec{e}}_n(t) = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{e}_n(t) \quad \forall n=1,2,3 \quad \text{Formula di Poisson}$$

Inoltre: a)  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \vec{e}_n \wedge \dot{\vec{e}}_n = (\dot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_1 + (\dot{\vec{e}}_3 \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_2 + (\dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_3$   
 $= \dot{\psi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{i} + \dot{\phi} \vec{e}_3$  ( $\psi, \theta, \phi =$  angoli di Eulero);

b)  $\vec{u}$  vettore solidale a corpo rigido  $\Rightarrow \vec{u} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$ ;

c)  $\vec{\omega}$  non dipende dalle scelte della terna solidale  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ .

dim: 1) Lemma:  $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  t.c.  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \exists \vec{c} \in \mathbb{R}^3$  t.c.  $\vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{a}$  ( $\exists!$   $\vec{c}$  se scelto  $\perp \vec{a}$ )

In fatti, dati  $\vec{a}, \vec{b}$  come sopra, si può sempre scegliere una terna ortomorfo

$\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  t.c.  $\vec{a} = |\vec{a}| \hat{i}, \vec{b} = |\vec{b}| \hat{j}$ . Segue che

$$\vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{a} \Leftrightarrow |\vec{b}| \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ c_x & c_y & c_z \\ |\vec{a}| & 0 & 0 \end{vmatrix} = c_z |\vec{a}| \hat{j} - c_y |\vec{a}| \hat{k} \Leftrightarrow c_x \in \mathbb{R}, c_y = 0, c_z = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$$

2)  $|\vec{e}_n| = 1$  (ortomorfo)  $\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} |\vec{e}_n|^2 = 2 \vec{e}_n \cdot \dot{\vec{e}}_n \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \exists \vec{\omega}_n \in \mathbb{R}^3$  t.c.  $\dot{\vec{e}}_n = \vec{\omega}_n \wedge \vec{e}_n$  ( $n=1,2,3$ )

NB: e questo punto non è ancora detto che  $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_3$

3)  $\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = 0$  se  $m \neq n \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} (\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n) = \dot{\vec{e}}_m \cdot \vec{e}_n + \vec{e}_m \cdot \dot{\vec{e}}_n \Rightarrow \dot{\vec{e}}_m \cdot \vec{e}_n = -\vec{e}_m \cdot \dot{\vec{e}}_n$

Allora, posto  $\vec{\omega}_n = (x_n, y_n, z_n)$  per ogni  $n=1,2,3$  come nel punto (2), segue che

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_2 &= (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_2 = (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \cdot \vec{\omega}_1 = \vec{e}_3 \cdot \vec{\omega}_1 = z_1 \\ -\vec{e}_1 \cdot \dot{\vec{e}}_2 &= -\vec{e}_1 \cdot (\vec{\omega}_2 \wedge \vec{e}_2) = -\vec{\omega}_2 \cdot (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1) = -\vec{\omega}_2 \cdot (-\vec{e}_3) = z_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_1 = z_2$$

Si verifica analogamente che:  $x_1 = x_2 = x_3, y_1 = y_2 = y_3, z_1 = z_2 = z_3 \Rightarrow \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_3 = \vec{\omega}$

4) Per assurdo:  $\exists \vec{w} \neq \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$  t.c.  $\dot{\vec{e}}_n = \vec{w} \wedge \vec{e}_n \quad \forall n=1,2,3$ . Allora (esistenza)

$$(\vec{w} - \vec{\omega}) \wedge \vec{e}_n = \vec{w} \wedge \vec{e}_n - \vec{\omega} \wedge \vec{e}_n = \dot{\vec{e}}_n - \dot{\vec{e}}_n = \vec{0} \quad \forall n \Rightarrow \vec{w} - \vec{\omega} \parallel \vec{e}_n \quad \forall n \nabla \Rightarrow \vec{w} = \vec{\omega} \text{ (unicità)}$$

a) Posto  $\bar{\omega}_x = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \bar{e}_n \wedge \dot{\bar{e}}_n$ , segue che

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_x \wedge \bar{e}_m &= \frac{1}{2} \sum_n (\bar{e}_n \wedge \dot{\bar{e}}_n) \wedge \bar{e}_m = \frac{1}{2} \sum_n [(\bar{e}_n \cdot \bar{e}_m) \dot{\bar{e}}_n - (\dot{\bar{e}}_n \cdot \bar{e}_m) \bar{e}_n] \\ &= \frac{1}{2} \sum_n [\delta_{nm} \dot{\bar{e}}_n - (-\bar{e}_n \cdot \dot{\bar{e}}_m) \bar{e}_n] = \frac{1}{2} [\dot{\bar{e}}_m + \sum_n (\dot{\bar{e}}_m \cdot \bar{e}_n) \bar{e}_n] = \frac{1}{2} [\dot{\bar{e}}_m + \dot{\bar{e}}_m] = \dot{\bar{e}}_m \end{aligned}$$

$\Rightarrow \bar{\omega}_x$  è l'unico vettore che soddisfa la formula di Poisson. Inoltre:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_x &= \frac{1}{2} \sum_n \bar{e}_n \wedge \dot{\bar{e}}_n = \frac{1}{2} \sum_n \bar{e}_n \wedge \left[ \sum_m (\dot{\bar{e}}_m \cdot \bar{e}_n) \bar{e}_m \right] = \frac{1}{2} \sum_{n,m} (\dot{\bar{e}}_m \cdot \bar{e}_n) \bar{e}_n \wedge \bar{e}_m \\ &= \frac{1}{2} [(\dot{\bar{e}}_1 \cdot \bar{e}_2) \bar{e}_3 + (\dot{\bar{e}}_1 \cdot \bar{e}_3) (-\bar{e}_2) + (\dot{\bar{e}}_2 \cdot \bar{e}_1) (-\bar{e}_3) + (\dot{\bar{e}}_2 \cdot \bar{e}_3) \bar{e}_1 + (\dot{\bar{e}}_3 \cdot \bar{e}_1) \bar{e}_2 + (\dot{\bar{e}}_3 \cdot \bar{e}_2) (-\bar{e}_1)] \\ &= (\dot{\bar{e}}_2 \cdot \bar{e}_3) \bar{e}_1 + (\dot{\bar{e}}_3 \cdot \bar{e}_1) \bar{e}_2 + (\dot{\bar{e}}_1 \cdot \bar{e}_2) \bar{e}_3 \quad (\text{espressione esplicita}) \end{aligned}$$

b)  $\bar{u}(t) \equiv \bar{u} \in \mathbb{R}^3$  solidale  $\Rightarrow \exists u_1, u_2, u_3 = \text{costanti} \in \mathbb{R}$  t.c.  $\bar{u}(t) = \sum_{n=1}^3 u_n \bar{e}_n(t)$   
 $\Rightarrow \dot{\bar{u}}(t) = \sum_n u_n \dot{\bar{e}}_n(t) = \sum_n u_n (\bar{\omega} \wedge \bar{e}_n(t)) = \bar{\omega} \wedge \sum_n u_n \bar{e}_n(t) = \bar{\omega} \wedge \bar{u}(t)$

c)  $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$  terza solidale destra diversa da  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ .  
 $\Rightarrow$  In particolare  $\bar{f}_n$  è un vettore solidale  $\xrightarrow{b)}$   $\dot{\bar{f}}_n = \bar{\omega} \wedge \bar{f}_n$  (indip. da terza)  $\square$

Oss: lo stesso risultato può essere derivato alternativamente usando l'algebra matriciale.

A tale scopo, osserviamo che ogni terza ortogonale destra  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  solidale al corpo rigido può essere ottenuta agendo sulla terza fissa  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  con una trasformazione ortogonale  $R_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dipendente dal tempo:

$$\bar{e}_n(t) = R_t \bar{e}_n(0) \quad \text{con} \quad \bar{e}_1(0) = \hat{i}, \bar{e}_2(0) = \hat{j}, \bar{e}_3(0) = \hat{k} \quad \text{e} \quad R_t^T R_t = R_t R_t^T = \mathbb{1} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{e}_n(0) &= R_t^{-1} \bar{e}_n(t) = R_t^T \bar{e}_n(t) \\ \dot{\bar{e}}_n(t) &= \dot{R}_t \bar{e}_n(0) = \dot{R}_t R_t^T \bar{e}_n(t) = \Omega_t \bar{e}_n(t) \\ 0 &= \frac{d}{dt} \mathbb{1} = \frac{d}{dt} (R_t R_t^T) = \dot{R}_t R_t^T + R_t \dot{R}_t^T \Rightarrow \dot{R}_t R_t^T = -R_t \dot{R}_t^T = -(\dot{R}_t R_t^T)^T \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{\bar{e}}_n(t) = \Omega_t \bar{e}_n(t) \\ \text{con} \quad \Omega_t^T = -\Omega_t \end{array}$$

Inoltre, l'azione di ogni opp. lin. antisimmetrica può essere espressa come prodotto vettore con un vettore angolare:

$$\Omega^T = -\Omega \Leftrightarrow \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Omega \bar{u} = \bar{\omega} \wedge \bar{u} \quad \text{con} \quad \bar{\omega} = (-\omega_{23}, \omega_{13}, -\omega_{12})$$

(vedi esempi rapp. matriciale)

Ricapitolando, si ottiene  $\dot{\bar{e}}_n(t) = \dot{R}_t R_t^T \bar{e}_n(t) = \Omega_t \bar{e}_n(t) = \bar{\omega}(t) \wedge \bar{e}_n(t)$ .

Oss: La velocità angolare  $\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}(t)$  è unica per ogni corpo rigido, ma può variare nel tempo. Ovviamente, corpi rigidi diversi hanno in generale velocità angolari diverse.

Teorema di Rivale (Formula fondamentale della cinematica rigida / legge di distrib. delle velocità)

Un sistema di punti materiali forma un corpo rigido  $\mathcal{C}$  se e solo se

$$\forall t \in \mathbb{R} \exists \bar{\omega}(t) \equiv \bar{\omega} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \boxed{\bar{v}_P - \bar{v}_Q = \bar{\omega} \wedge \bar{QP} \quad \forall Q, P \in \mathcal{C}} \quad \rightsquigarrow (\bar{v}_P - \bar{v}_Q) \cdot \bar{PQ} = 0$$

dim: ( $\Rightarrow$ )  $\mathcal{C}$  corpo rigido  $\Rightarrow \bar{PQ}$  solidale a  $\mathcal{C} \quad \forall P, Q \in \mathcal{C} \Rightarrow \bar{v}_P - \bar{v}_Q = \dot{\bar{OP}} - \dot{\bar{OQ}} = \dot{\bar{QP}} = \bar{\omega} \wedge \bar{QP}$

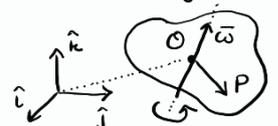
Teo. Poisson  $\uparrow$

$$\begin{aligned} (\Leftarrow) \bar{v}_P - \bar{v}_Q &= \bar{\omega} \wedge \bar{QP} \quad \forall Q, P \in \mathcal{C} \Rightarrow 0 = \bar{QP} \cdot (\bar{\omega} \wedge \bar{QP}) = \bar{QP} \cdot \dot{\bar{QP}} = \bar{QP} \cdot \dot{\bar{QP}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\bar{QP}|^2 \\ &\Rightarrow |\bar{QP}| = |P-Q| = \text{costante nel tempo} \quad \forall P, Q \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \text{ è rigido.} \quad \square \end{aligned}$$

Oss: Note la velocità  $\bar{v}_O$  di un punto  $O$  del corpo rigido e nota la velocità angolare  $\bar{\omega}$ , la velocità  $\bar{v}_P$  di ogni altro punto del corpo è data da

$\bar{v}_P = \bar{v}_O + \bar{\omega} \wedge \bar{OP}$

caratteristica di traslazione  $\uparrow$  caratteristica di rotazione



OSS: Moltiplicando la formula di Rivals per un tempo infinitesimo  $dt$ , si ottiene la relazione per gli spostamenti infinitesimi

$$dP = dO + d\bar{\Omega} \wedge \bar{OP}, \quad d\bar{\Omega} = \bar{\omega} dt = \text{vettore di rotazione infinitesima}$$

OSS:  $\bar{\omega} \wedge \bar{OP} \perp \bar{\omega} \Rightarrow (\bar{v}_P - \bar{v}_Q) \cdot \bar{\omega} = 0 \Rightarrow \bar{v}_P \cdot \bar{\omega} = \bar{v}_Q \cdot \bar{\omega} \quad \forall P, Q \in \mathcal{E}$  corpo rigido

Def: L'invariante scalare del corpo rigido è  $I(t) := \bar{v}_P(t) \cdot \bar{\omega}(t)$

OSS: Il termine "invariante" fa riferimento all'indipendenza dal punto  $P \in \mathcal{E}$  usato per scrivere  $I$ . Al contrario,  $I(t)$  dipende in modo non banale dal tempo  $t \in \mathbb{R}$  in cui è valutato:

$$\frac{dI}{dt}(t) = \dot{\bar{v}}_P(t) \cdot \bar{\omega}(t) + \bar{v}_P(t) \cdot \dot{\bar{\omega}}(t) = \bar{a}_P(t) \cdot \bar{\omega}(t) + \bar{v}_P(t) \cdot \bar{\alpha}(t)$$

Corollario di Rivals (Legge di distribuzione delle accelerazioni)

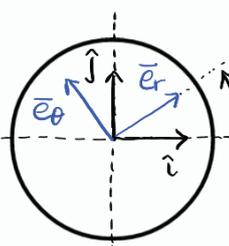
Le accelerazioni dei punti appartenenti ad un corpo rigido  $\mathcal{E}$  soddisfano l'identità:

$$\bar{a}_P = \bar{a}_Q + \dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{QP} + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{QP}) \quad \forall P, Q \in \mathcal{E}$$

accelerazione centripeta

$$\text{dim: } \bar{a}_P = \frac{d}{dt} \bar{v}_P = \frac{d}{dt} (\bar{v}_Q + \bar{\omega} \wedge \bar{QP}) = \dot{\bar{v}}_Q + \dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{QP} + \bar{\omega} \wedge \dot{\bar{Q}}P = \bar{a}_Q + \dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{QP} + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{QP})$$

Esempio: Moto rotatorio di un disco 2D con centro fisso



$(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  sist. di ref. fisso

$(O', \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  sist. di ref. solidale

↳ Possiamo scegliere la terna ortogonale cilindrica:

- $O' \equiv O =$  centro fisso del disco
- $\bar{e}_1 = \bar{e}_r =$  vettore radiale
- $\bar{e}_2 = \bar{e}_\theta =$  vettore angolare
- $\bar{e}_3 = \hat{k} =$  vettore fisso  $\perp$  disco

$\dot{\theta}(t) = \Omega(t) =$  velocità angolare  $\Rightarrow \theta(t) = \int_0^t \dot{\theta}(t') dt'$

$$\begin{cases} \bar{e}_1(t) = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j} = \cos\left(\int_0^t \dot{\theta}(t') dt'\right) \hat{i} + \sin\left(\int_0^t \dot{\theta}(t') dt'\right) \hat{j} \\ \bar{e}_2(t) = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j} = -\sin\left(\int_0^t \dot{\theta}(t') dt'\right) \hat{i} + \cos\left(\int_0^t \dot{\theta}(t') dt'\right) \hat{j} \\ \bar{e}_3(t) = \hat{k} = \text{costante} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{e}}_1(t) = \Omega(t) \bar{e}_2(t) \\ \dot{\bar{e}}_2(t) = -\Omega(t) \bar{e}_1(t) \\ \dot{\bar{e}}_3(t) = 0 \end{cases}$$

Teo Poisson  $\Rightarrow \bar{\omega}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \bar{e}_n \wedge \dot{\bar{e}}_n = \frac{1}{2} (\bar{e}_1 \wedge \dot{\bar{e}}_1 + \bar{e}_2 \wedge \dot{\bar{e}}_2 + \bar{e}_3 \wedge \dot{\bar{e}}_3) = \frac{1}{2} (\bar{e}_1 \wedge (\Omega \bar{e}_2) + \bar{e}_2 \wedge (-\Omega \bar{e}_1)) = \frac{1}{2} \cdot 2 \Omega \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 = \Omega \bar{e}_3 =$  vettore  $\perp$  piano di rotazione con modulo dato dalla velocità angolare  $\Omega$

Teorema di Rivals (con  $O =$  centro fisso del disco)  $\Rightarrow \bar{v}_P = \bar{v}_O + \bar{\omega} \wedge \bar{OP} = \Omega \hat{k} \wedge \bar{OP}$

OSS:  $\bar{OP} \in$  piano  $\perp \hat{k} \Rightarrow \hat{k} \wedge \bar{OP} =$  vettore  $\in$  piano  $\perp \hat{k}$  ortogonale a  $\bar{OP}$ , con modulo  $|\bar{OP}|$

$$\Rightarrow |\bar{v}_P(t)| = |\Omega(t)| |\bar{OP}(t)| \quad \left( \begin{array}{l} \text{velocità} \\ \text{tangenziale} \end{array} = \begin{array}{l} \text{velocità} \\ \text{angolare} \end{array} \times \text{raggio} \right)$$

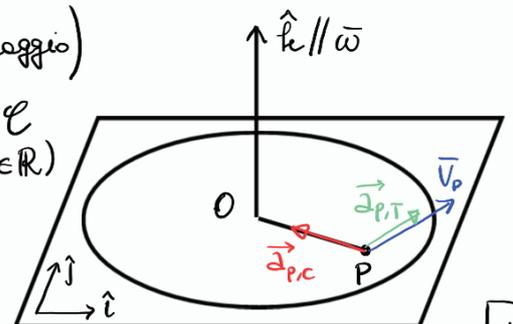
Invariante scalare:  $I = \bar{v}_P \cdot \bar{\omega} = (\Omega \hat{k} \wedge \bar{OP}) \cdot (\Omega \hat{k}) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{E}$

Accelerazione:  $\bar{a}_P = \dot{\bar{v}}_P = \dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{OP} + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{OP}) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$

$$\dot{\bar{\omega}} = \frac{d}{dt} (\Omega(t) \hat{k}) = \dot{\Omega}(t) \hat{k}$$

$$\bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{OP}) = (\bar{\omega} \cdot \bar{OP}) \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}) \bar{OP} = -|\bar{\omega}|^2 \bar{OP} = -\Omega^2 \bar{OP}$$

$$\Rightarrow \bar{a}_P = \dot{\Omega} \hat{k} \wedge \bar{OP} - \Omega^2 \bar{OP} = \bar{a}_{P, \text{tang}} + \bar{a}_{P, \text{cent}}$$



• Moto circolare uniforme:  $\Omega(t) = \text{costante} \Rightarrow \dot{\Omega} = 0 \Rightarrow \bar{a}_{p, \text{tang}} = \bar{0}$   
 $\Rightarrow \bar{a}_p(t) = \bar{a}_{p, \text{cent}} = -\Omega^2 \overline{OP}(t)$  (accelerazione puramente centripeta)

Moti rigidi - casi particolari

Alla luce di quanto detto in precedenza, una generica configurazione di un corpo rigido è descritta da 6 gradi di libertà. Allo stesso modo, un generico moto del corpo rigido è descritto da 6 funzioni del tempo (a valori reali).  
 Ad esempio, scegliendo un sist. di rif. fisso  $(O; \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\})$  ed uno solidale  $(O'; \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ , si possono scegliere

$$\underline{x_0(t), y_0(t), z_0(t)}; \underline{\psi(t), \theta(t), \phi(t)}$$

coord. cartesiane dell'origine del sist. di rif. solidale (gdl traslazionali)

angoli di Eulero rispetto al sist. di rif. fisso (gdl rotazionali)

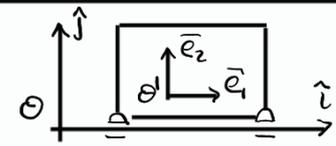
Def: Un moto rigido è detto traslatorio se esistono una teresa solidale  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  ed una teresa fissa  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  che non ruotano una rispetto all'altra.

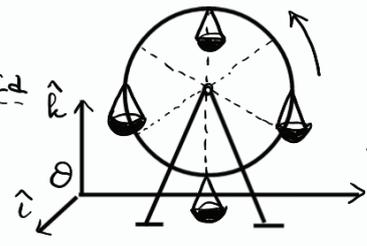
Oss: proprietà definita da una coppia di terese (fissa + solidale)  
 $\hookrightarrow$  se è soddisfatta per una coppia di terese, allora è automaticamente verificata per ogni coppia di terese, di cui una è fissa e l'altra è solidale

Oss: Moto traslatorio  $\Leftrightarrow \psi, \theta, \phi$  costanti  $\Leftrightarrow$  3 gdl traslazionali  
 $(\dot{\psi} = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0)$   $x_0(t), y_0(t), z_0(t) \in \mathbb{R}^3$

Proposizione: moto rigido traslatorio  $\Leftrightarrow \bar{\omega}(t) = \bar{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$  (vel. angolare Poisson)  $\Leftrightarrow \bar{v}_p(t) = \bar{v}_q(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, P, Q \in E$  (teorema Rivals)

dim: ( $\Rightarrow$ ) Sia  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  teresa solidale: Moto traslatorio  $\Rightarrow \dot{\bar{e}}_n = 0 \quad \forall n=1,2,3$   
 Teo Poisson  $\Rightarrow \bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \bar{e}_n \wedge \dot{\bar{e}}_n = \bar{0}$   
 ( $\Leftarrow$ ) Sia  $\bar{\omega}(t) = \bar{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ : Teo Poisson  $\Rightarrow \dot{\bar{e}}_n = \bar{\omega} \wedge \bar{e}_n = \bar{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall n=1,2,3$   
 $\Rightarrow$  la teresa solidale  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  è fissa  $\blacksquare$

Esempi: 1) Carrello:   $\bar{e}_1 = \hat{i}, \bar{e}_2 = \hat{j}, \bar{e}_3 = \hat{k} \quad \forall t \in \mathbb{R}$   
 $\overline{OO'}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (x(t), y_0, z_0) \in \mathbb{R}$

2) Ruota panoramica   $\bar{e}_3$  non ruota rispetto a  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ .  
 L'intera giostra non è un corpo rigido. La singola cabina è un corpo rigido che compie un moto traslatorio (trascurando le oscillazioni rispetto) ed il punto di sospensione

Def: Un moto rigido è detto rototraslatorio se esistono una teresa solidale  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  ed una teresa fissa  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  tali che  $\bar{e}_3$  non ruota rispetto a  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ .  
 La direzione identificata da  $\bar{e}_3$  è detta direzione privilegiata

OSS: moto rigido rototraslatorio  $\Rightarrow \exists \bar{e}_3 = \text{cost.} = \hat{k} \Rightarrow \theta = 0$  e  $\Psi, \phi$  complessi  
 $\Rightarrow \exists!$  angolo di rotazione  $\tilde{\Psi} = \Psi + \phi$  nel piano  $\perp \hat{k}$ .

$\Rightarrow$  4 gdl:  $(x_{0i}(t), y_{0i}(t), z_{0i}(t), \tilde{\Psi}(t)) \in \mathbb{R}^3 \times [0, 2\pi)$

OSS: un moto traslatorio è un particolare caso di moto rototraslatorio, con tutti e tre i vettori solidali fissi.

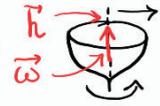
Proposizione: moto rigido rototraslatorio  $\Leftrightarrow \frac{\bar{\omega}(t)}{|\bar{\omega}(t)|} = \text{direzione di } \bar{\omega}(t) = \text{costante} = \bar{h} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

OSS: il modulo  $|\bar{\omega}(t)|$  può variare nel tempo.

dim: ( $\Rightarrow$ ) Sia  $\bar{e}_3 = \hat{k}$  il vettore solidale associato alla direzione privilegiata

Teo Poisson  $\Rightarrow 0 = \dot{\bar{e}}_3 = \bar{\omega} \wedge \bar{e}_3 = \bar{\omega} \wedge \hat{k} \Rightarrow \bar{\omega}(t) \parallel \hat{k} \quad \forall t$

( $\Leftarrow$ ) Sia  $\bar{\omega}(t) = \Omega(t) \bar{h}$  con  $\bar{h} = \text{cost.} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \bar{e}_3 = \frac{\bar{h}}{|\bar{h}|}$  individua la direz. privilegiata  $\square$

Esempio: giroscopio/trottola (centro gravità)  Il corpo rigido ruota attorno ad un asse che trasla senza cambiare orientazione

Def: Un moto rigido rototraslatorio con direzione privilegiata  $\bar{h}$  è detto elicoidale se esiste un asse  $r$  solidale, parallelo ad  $\bar{h}$  i cui punti hanno tutti velocità  $\parallel \bar{h}$ .

OSS: la direzione privilegiata  $\bar{h}$  è identificata dal vettore di Poisson  $\bar{\omega}(t)$  ( $\bar{h} = \frac{\bar{\omega}(t)}{|\bar{\omega}(t)|}$ ):

$r \parallel \bar{h} \Leftrightarrow r \parallel \bar{\omega}(t) \Rightarrow \overline{PQ} \parallel \bar{\omega}(t) \quad \forall P, Q \in r \Rightarrow \bar{v}_Q = \bar{v}_P + \bar{\omega} \wedge \overline{PQ} \Rightarrow \bar{v}_P = \bar{v}_Q \parallel \bar{\omega} \quad \forall P, Q \in r.$

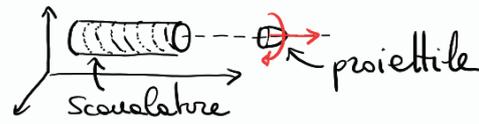
In particolare, per verificare che un moto rototraslatorio sia elicoidale basta verificare che  $\bar{v}_P \parallel \bar{\omega}(t)$  per un unico punto  $P \in r$ .

OSS: in un moto elicoidale,  $P \in r \Rightarrow \bar{v}_P \parallel \bar{\omega}(t) \parallel \bar{h}$  fisso.

$\Rightarrow$  scelto un sist. di rif. fisso  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  con  $\hat{k} \parallel \bar{h}$ , si ha  $(x_p, y_p) = \text{costanti} \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$  2 gdl:  $(z_p(t), \Psi(t)) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$  [vedi moto rototraslatorio]

Esempi: 1) Vite/bullone:   $\bar{\omega}(t) = \Omega(t) \hat{k}$   
 $\bar{v}_P = \bar{v}_Q = v \hat{k} \quad \forall P, Q \in \text{asse di rotazione.}$

2) Proiettile (canna rigata)  Scandole  
 proiettile

Def: Un moto rigido rototraslatorio con direzione privilegiata  $\bar{h}$  è detto rotatorio se esiste un asse  $r$  solidale, parallelo ad  $\bar{h}$  i cui punti hanno tutti velocità nulla.  
 $r$  è detto asse di rotazione.

OSS:  $\{\text{moti rotatori}\} \subset \{\text{moti elicoidali}\} \subset \{\text{moti rototraslatori}\}$ .

OSS:  $\bar{v}_P = \bar{0} \quad \forall P \in r \Rightarrow$  scelto sist. di rif.  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  con  $\hat{k} \parallel \bar{h} \parallel r$ , si ha  $(x_p, y_p, z_p) = \text{cost.} \in \mathbb{R}^3$   
 $\Rightarrow 1!$  gdl:  $\Psi(t) \in [0, 2\pi) =$  angolo di rotazione nel piano  $\perp \bar{h}$ .

Def: Un moto rigido è detto piano se le caratteristiche  $\bar{v}_0(t), \bar{\omega}(t)$  soddisfano

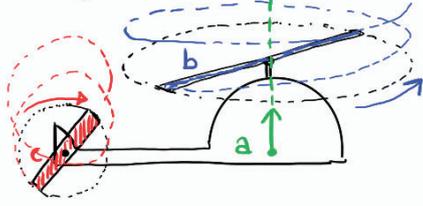
$$\frac{\bar{\omega}(t)}{|\bar{\omega}(t)|} = \text{costante}, \quad \bar{v}_0(t) \cdot \bar{\omega}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

OSS:  $\{\text{moti rigidi piani}\} \subset \{\text{moti rototraslatori}\}$ .

OSS: moto rigido piano  $\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \exists \pi_0 = \text{piano fisso } \perp \bar{\omega}(t) \\ \exists \pi_s = \text{piano solidale } \perp \bar{\omega}(t) \end{array} \right\} \text{T.c. dist}(\pi_0, \pi_s) = \text{costante.}$

In particolare:  $z_0(t) = \text{cost. } \forall t \Rightarrow 3 \text{ gdl: } (x_0(t), y_0(t), \psi(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$   
 $\Rightarrow$  corrispondente biunivoca con corpo rigido piano.

Esempio: Elicottero in ascesa verticale



Corpo elicoidale formato da 3 corpi rigidi  
 a) carlinga: moto traslatorio rispetto al suolo  
 b) rotore: moto elicoidale con direzione privilegiata identificata dal moto di trasmissione.  
 c) rotore anticoppia: moto rototraslatorio piano

Def: Un moto rigido è detto

- polare (o precessione) se esiste un punto solidale fisso:  $C \in \mathcal{E}$  t.c.  $\bar{v}_C(t) = \bar{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ ;
- precessione (o precessione regolare) se è un moto polare ed

$\exists \hat{k}$  vettore fisso,  $\bar{e}_3$  vettore solidale t.c.  $\hat{k} \cdot \bar{e}_3(t) = \text{costante} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

OSS: moto polare  $\Rightarrow$  conviene scegliere sist. di rif. solidale con origine nel pt. fisso C.

$\Rightarrow (x_C, y_C, z_C) = \text{cost.} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow 3 \text{ gdl traslazionali: } \bar{v}_P = \bar{v}_C + \bar{\omega} \wedge \overline{CP} \quad \forall P \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow 3 \text{ gdl rotazionali: } (\psi, \theta, \phi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi) \times [0, 2\pi)$  angoli di Eulero

$\leftrightarrow$  rotazione terra solidale rispetto a terra fissa.

Proposizione: Un moto polare è una precessione regolare con vettori  $\hat{k}, \bar{e}_3$  se e solo se

$$\exists \lambda(t), \mu(t) \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \bar{\omega}(t) = \lambda(t) \bar{e}_3(t) + \mu(t) \hat{k}$$

velocità angolare di rotazione propria

velocità angolare di precessione

OSS:  $\bar{\omega}(t) \in$  piano generato da  $\bar{e}_3, \hat{k}$  (combinazione lineare).

dim: ( $\Rightarrow$ ) precessione regolare  $\Leftrightarrow \exists \hat{k}$  fisso,  $\bar{e}_3$  solidale t.c.  $\hat{k} \cdot \bar{e}_3(t) = \text{costante}$

$\bar{e}_3$  solidale + Teo Poisson  $\Rightarrow \dot{\bar{e}}_3 = \bar{\omega} \wedge \bar{e}_3$

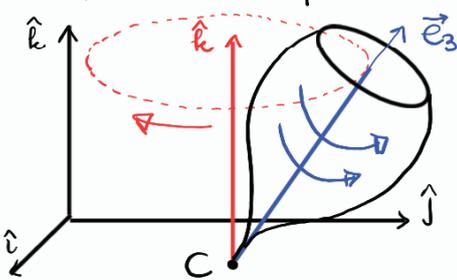
$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} (\hat{k} \cdot \bar{e}_3) = \hat{k} \cdot \dot{\bar{e}}_3 = \hat{k} \cdot (\bar{\omega} \wedge \bar{e}_3) \Leftrightarrow \hat{k}, \bar{\omega}, \bar{e}_3 \text{ complanari (lin. dip.) } \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \bar{\omega} = \lambda \bar{e}_3 + \mu \hat{k}$$

$$(\Leftarrow) \bar{\omega} = \lambda \bar{e}_3 + \mu \hat{k} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\hat{k} \cdot \bar{e}_3) = \hat{k} \cdot (\bar{\omega} \wedge \bar{e}_3) = \hat{k} \cdot [(\lambda \bar{e}_3 + \mu \hat{k}) \wedge \bar{e}_3] = \mu \bar{e}_3 \cdot (\hat{k} \wedge \bar{e}_3) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{k} \cdot \bar{e}_3 = \text{costante} \Rightarrow \text{precessione regolare}$$

Esempio: trottola pesante



La trottola è un unico corpo rigido.

Se il punto di contatto col suolo non si muove, la trottola compie un moto polare.

La trottola ruota intorno all'asse solidale  $\bar{e}_3(t)$ , il quale a sua volta ruota attorno all'asse fisso  $\hat{k}$ .

Se l'angolo tra  $\bar{e}_3(t)$  e  $\hat{k}$  non cambia nel tempo, il moto è una precessione regolare

NB: non tutti i possibili moti di un corpo rigido rientrano in uno dei casi precedenti.

Atti di moto rigidi

Def: Dato un sistema di N punti materiali, il suo atto di moto (adm) al tempo  $t \in \mathbb{R}$  è

$$A = \{ (P_i(t), \bar{v}_i(t)) \in \mathcal{E}^3 \times \mathbb{R}^3 \}_{i=1, \dots, N}$$

OSS: adm  $\sim$  stato cinematico del sistema al tempo t  $\sim$  istantanea del sistema.

## Def (particolari adm)

- adm rigido:  $(\bar{v}_p(t) - \bar{v}_q(t)) \cdot \overline{QP} = 0 \quad \forall P, Q \in \mathcal{C}$  (vedi teo iniziale su corpi rigidi);
- adm traslatorio:  $\bar{v}_p(t) = \bar{v}_q(t) \quad \forall P, Q \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \bar{\omega}(t) = \bar{0}$
- adm rototraslatorio:  $\exists \bar{h} =$  direzione privilegiata t.c.  $\bar{v}_p(t) = \bar{v}_q(t) \quad \forall P, Q \in \mathcal{C}$  t.c.  $\overline{PQ} \parallel \bar{h}$
- adm elicoidale: adm rototrasl.,  $\exists r \parallel \bar{h}$  t.c.  $\bar{v}_p(t) = \bar{v}_q(t) \parallel \bar{h} \quad \forall P, Q \in \mathcal{C}$
- adm rotatorio: adm rototrasl.,  $\exists r \parallel \bar{h}$  t.c.  $\bar{v}_p(t) = \bar{v}_q(t) = \bar{0} \quad \forall P, Q \in \mathcal{C}$   
( $r =$  asse di istantanea rotazione)
- adm piano: i)  $\exists \hat{k} \in \mathbb{R}^3$  t.c.  $\bar{v}_p(t) \cdot \hat{k} = 0 \quad \forall P \in \mathcal{C}$ ;  
ii)  $\overline{PQ} \parallel \hat{k} \Rightarrow \bar{v}_p(t) \parallel \bar{v}_q(t)$ .

$$(\bar{v}_p - \bar{v}_q) \cdot \overline{QP} = 0 \quad \forall P, Q \in \mathcal{C}$$

- 1)  $\bar{v}_p - \bar{v}_q = \bar{0}$   
↳ Translazione
- 2)  $\overline{QP} = \bar{0} \Rightarrow Q = P$  banale
- 3)  $\bar{v}_p - \bar{v}_q \perp \overline{QP}$   
↳  $\exists \bar{\omega}$  t.c.  $\bar{v}_p - \bar{v}_q = \bar{\omega} \wedge \overline{QP}$

OSS: Dai teoremi di Poincaré e Rivoltò segue che: adm rigido  $\Leftrightarrow$  adm rototraslatorio.

OSS: Ricordiamo che ad ogni tempo fissato  $t \in \mathbb{R}$ , l'invariante scalare  $I(t) = \bar{\omega}(t) \cdot \bar{v}_p(t)$  di un corpo rigido non dipende dal punto  $P \in \mathcal{C}$  considerato

Teorema di Mozzi: Ogni adm rigido è elicoidale, eventualmente degenera in adm rotatorio o adm traslatorio. Inoltre, si ha la classificazione seguente, in funzione della velocità angolare  $\bar{\omega}$  e dell'invariante scalare  $I$  del corpo rigido:

- $(I = 0, \bar{\omega} = \bar{0}) \Leftrightarrow$  adm traslatorio;
- $I = 0, \bar{\omega} \neq \bar{0} \Leftrightarrow$  adm rotatorio;
- $I \neq 0, (\bar{\omega} \neq \bar{0}) \Leftrightarrow$  adm rototraslatorio.

Inoltre, se  $\bar{\omega} \neq \bar{0}$  allora  $\exists!$   $m =$  asse di Mozzi = asse solidale  $\parallel \bar{\omega}$ , parametrizzato come segue, per  $\theta \in \mathcal{C}$  scelto arbitrariamente e  $\lambda \in \mathbb{R}$  parametro affine:

$$\overline{OM}_\lambda = \lambda \bar{\omega} + \frac{\bar{\omega} \wedge \bar{v}_\theta}{|\bar{\omega}|^2} \quad \forall M_\lambda \in m \quad \left[ \text{Parametrizzazione affine della} \right. \\ \left. \text{retta } \parallel \bar{\omega}, \text{ passante per } \frac{\bar{\omega} \wedge \bar{v}_\theta}{|\bar{\omega}|^2} \right]$$

Di tutti i punti del corpo rigido, quelli situati sull'asse di Mozzi hanno velocità minima in modulo:

$$\bar{v}_M = \frac{I}{|\bar{\omega}| |\bar{\omega}|} \quad \forall M \in m.$$

dim: Se  $\bar{\omega} = \bar{0}$ , segue dal teorema di Rivoltò che il moto è traslatorio:

$$\bar{v}_p = \bar{v}_q + \bar{\omega} \wedge \overline{QP} = \bar{v}_q \quad \forall P, Q \in \mathcal{C}$$

Assumeremo  $\bar{\omega} \neq \bar{0}$  nel resto della dimostrazione. Per dimostrare il teorema useremo il seguente risultato ausiliario.

Lemma: Dati  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3$ , l'equazione  $\bar{x} \wedge \bar{a} = \bar{b}$  ammette soluzione  $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$  se e solo se  $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$  inoltre  $\exists!$   $s =$  retta delle soluzioni, parametrizzata come

$$\bar{x}_\lambda = \lambda \bar{a} + \frac{\bar{a} \wedge \bar{b}}{|\bar{a}|^2} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

dim: •  $\bar{a} \cdot \bar{b} \neq 0 \Rightarrow \nexists \bar{x} \in \mathbb{R}^3$  t.c.  $\bar{x} \wedge \bar{a} = \bar{b}$

Per assurdo:  $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^3$  t.c.  $\bar{x} \wedge \bar{a} = \bar{b} \Rightarrow 0 \neq \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\bar{x} \wedge \bar{a}) = \bar{a} \cdot (\bar{x} \wedge \bar{a}) = 0 \quad \nabla$

•  $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Rightarrow \bar{x}_\lambda \wedge \bar{a} = \bar{b}$  per  $\bar{x}_\lambda = \lambda \bar{a} + \frac{\bar{a} \wedge \bar{b}}{|\bar{a}|^2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$  (esistenza soluzioni)

In fatti:  $\bar{x}_\lambda \wedge \bar{a} = \left( \lambda \bar{a} + \frac{\bar{a} \wedge \bar{b}}{|\bar{a}|^2} \right) \wedge \bar{a} = \frac{1}{|\bar{a}|^2} [(\bar{a} \cdot \bar{a}) \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b}) \bar{a}] = \frac{|\bar{a}|^2 \bar{b}}{|\bar{a}|^2} = \bar{b}$

•  $\bar{x}_*$  soluzione  $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$  t.c.  $\bar{x}_* = \bar{x}_\lambda \Leftrightarrow \bar{x}_* \in s$  (unicità retta soluzioni)

In fatti:  $(\bar{x}_* - \bar{x}_0) \wedge \bar{a} = \bar{x}_* \wedge \bar{a} - \bar{x}_0 \wedge \bar{a} = \bar{b} - \bar{b} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x}_* - \bar{x}_0 \parallel \bar{a} \Rightarrow \bar{x}_* = \lambda \bar{a} + \bar{x}_0 \quad \square$

Supponiamo note le caratteristiche  $\bar{v}_0, \bar{\omega} \neq \bar{0}$  dell'adm rigido e poniamo  $\bar{n}_\omega := \bar{\omega}/|\bar{\omega}|$

(1)  $\forall P \in \mathcal{E}$  si può scomporre la velocità  $\bar{v}_P$  come

$$\bar{v}_P = \underbrace{\bar{v}_P - (\bar{n}_\omega \cdot \bar{v}_P) \bar{n}_\omega}_{\bar{v}_{P,\perp}} + \underbrace{(\bar{n}_\omega \cdot \bar{v}_P) \bar{n}_\omega}_{\bar{v}_{P,\parallel}} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \bar{n}_\omega \cdot \bar{v}_{P,\perp} &= 0 \iff \bar{v}_{P,\perp} \perp \bar{n}_\omega \\ \bar{n}_\omega \wedge \bar{v}_{P,\parallel} &= 0 \iff \bar{v}_{P,\parallel} \parallel \bar{n}_\omega \end{aligned}$$

(2) Si osserva che

$$\bar{v}_{P,\parallel} = (\bar{v}_P \cdot \bar{n}_\omega) \bar{n}_\omega = \left( \bar{v}_P \cdot \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} \right) \bar{n}_\omega = \frac{I}{|\bar{\omega}|} \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} \quad \forall P \in \mathcal{E} \quad (\text{indipendente da } P!)$$

Si consideri ora il luogo geometrico formato dai punti del corpo rigido per i quali la componente perpendicolare della velocità è nulla:

$$m := \{ M \in \mathcal{E} \mid \bar{v}_{M,\perp} = \bar{0} \}$$

Teo Rivals  $\Rightarrow \bar{v}_M = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \wedge \bar{OM}$

(1)  $\Rightarrow \bar{v}_M = \bar{v}_{M,\perp} + \bar{v}_{M,\parallel}$   
 $\bar{v}_0 = \bar{v}_{0,\perp} + \bar{v}_{0,\parallel}$

(2)  $\Rightarrow \bar{v}_{M,\parallel} = \bar{v}_{0,\parallel}$   
 $M \in m \Rightarrow \bar{v}_{M,\perp} = \bar{0}$

$$\bar{v}_{M,\parallel} = \bar{v}_{0,\perp} + \bar{v}_{0,\parallel} + \bar{\omega} \wedge \bar{OM} \Rightarrow \frac{\bar{OM} \wedge \bar{\omega}}{\bar{x}} = -\bar{\omega} \wedge \bar{OM} = \frac{\bar{v}_{0,\perp}}{\bar{b}}$$

$\bar{\omega}, \bar{v}_{0,\perp}$  noti,  $\bar{OM}$  incognita  
 NB:  $\bar{v}_{0,\perp} \cdot \bar{\omega} = 0$  per costruzione  
 $\Downarrow$  Lemma  
 $\bar{OM} = \bar{OM}_\lambda = \lambda \bar{\omega} + \frac{\bar{\omega} \wedge \bar{v}_{0,\perp}}{|\bar{\omega}|^2} = \lambda \bar{\omega} + \frac{\bar{\omega} \wedge \bar{v}_0}{|\bar{\omega}|^2} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Usando ancora teo Rivals, deduciamo che

$$\bar{v}_M = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \wedge \bar{OM} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \wedge \left( \lambda \bar{\omega} + \frac{\bar{\omega} \wedge \bar{v}_0}{|\bar{\omega}|^2} \right) = \bar{v}_0 + \frac{1}{|\bar{\omega}|^2} [(\bar{v}_0 \cdot \bar{\omega}) \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{v}_0) \bar{v}_0] = \frac{I}{|\bar{\omega}|} \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|}$$

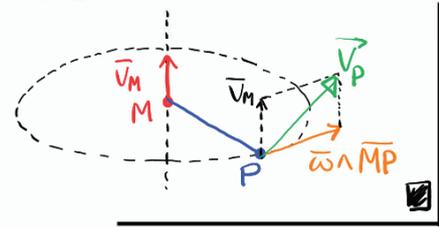
Concludiamo la dimostrazione con due osservazioni:

•  $I = 0, \bar{\omega} \neq \bar{0} \Rightarrow \bar{v}_{P,\parallel} = \frac{I}{|\bar{\omega}|} \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} = \bar{0} \quad \forall P \in \mathcal{E}$   
 $\bar{v}_{M,\perp} = \bar{0}$   
 $\forall M \in m \Rightarrow \bar{v}_M = \bar{v}_{M,\perp} + \bar{v}_{M,\parallel} = \bar{0} \quad \forall M \in m$   
 $\iff$  adm rotatorio.

• Teo Rivals  $\Rightarrow \bar{v}_P = \bar{v}_M + \bar{\omega} \wedge \bar{MP}$   
 $M \in m \Rightarrow \bar{v}_M = \bar{v}_{M,\parallel} = \frac{I}{|\bar{\omega}|} \bar{n}_\omega$   
 $(\bar{\omega} \wedge \bar{MP}) \cdot \bar{\omega} = 0$

$$|\bar{v}_P|^2 = |\bar{v}_M|^2 + |\bar{\omega} \wedge \bar{MP}|^2 \geq |\bar{v}_M|^2$$

modulo della velocità minimo su asse di Mozzi



OSS: adm rotatorio  $\Rightarrow I = \bar{\omega} \cdot \bar{v}_P = 0$   
 $M \in m$  ( $m =$  asse di Mozzi)  $\Rightarrow \bar{v}_P = \bar{\omega} \wedge \bar{MP} \quad \forall P \in \mathcal{E}$  (espressione pronte rotazionale per le velocità dei punti del corpo rigido)

(dim:  $\bar{\omega} \wedge \bar{MP} = -\bar{\omega} \wedge \bar{PM} = -\bar{\omega} \wedge \left( \lambda \bar{\omega} + \frac{\bar{\omega} \wedge \bar{v}_P}{|\bar{\omega}|^2} \right) = -\frac{1}{|\bar{\omega}|^2} [(\bar{\omega} \cdot \bar{v}_P) \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}) \bar{v}_P] = \bar{v}_P$ )

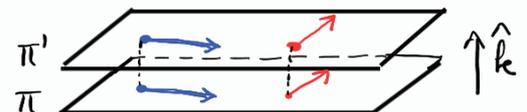
NB: non è una conseguenza del teo di Rivals, sebbene sia  $\bar{v}_M = \bar{0}$  per una rotazione. Il problema è che in generale non è detto che  $M$  sia effettivamente un punto del corpo rigido!

Il teorema di Mozzi ha ulteriori conseguenze nel caso di adm rigidi piani.

Si ricordi che un adm rigido è piano se: i)  $\exists \hat{k} \in \mathbb{R}^3$  t.c.  $\bar{v}_P \cdot \hat{k} = 0 \quad \forall P \in \mathcal{E}$

ii)  $\bar{PQ} \parallel \hat{k} \Rightarrow \bar{v}_P = \bar{v}_Q$

$\Rightarrow$  Si può ridurre l'analisi ad un problema 2D, scegliendo un piano rappresentativo  $\pi \perp \hat{k}$ .



L'asse di Mozzi  $m$  interseca questo piano in  $C = \pi \cap m =$  centro di istantanea rotazione (CIR)

Teorema di Eulero: Ogni otto di moto rigido piano è traslatorio oppure rotatorio.  
 Nel caso rotatorio, la posizione del CIR rispetto ad un generico punto  $P \in \mathcal{C}$  del corpo rigido è data da

$$\overline{PC} = \frac{\overline{\omega} \wedge \overline{VP}}{|\overline{\omega}|^2}$$

dim: La tesi segue dal teorema di Mozzi, osservando che  $\overline{\omega} \parallel \hat{k} \perp \overline{VP} \Rightarrow \mathbf{I} = \overline{\omega} \cdot \overline{VP} = 0$

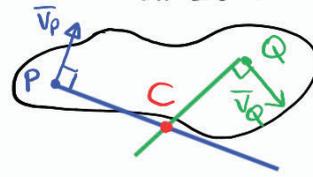
Teorema di Chasles: In un otto di moto rigido piano, dati due punti del corpo rigido  $P, Q \in \mathcal{C}$ , la posizione del CIR è determinata come segue:

- i)  $\overline{VP} \not\parallel \overline{VQ} \Rightarrow C = \{ \text{retta} \perp \overline{VP} \text{ passante per } P \} \cap \{ \text{retta} \perp \overline{VQ} \text{ passante per } Q \}$ ;
- ii)  $\overline{VP} \parallel \overline{VQ} \Rightarrow C \in \{ \text{retta} \perp \overline{VP} \text{ passante per } P \}$  con  $|\overline{CP}|/|\overline{VP}| = |\overline{CQ}|/|\overline{VQ}|$ .

dim: i)  $\overline{VP} \not\parallel \overline{VQ} \Rightarrow \overline{VP} \neq \overline{VQ} \Rightarrow$  adun non traslatorio  $\Rightarrow$  adun rotatorio  $\Rightarrow \exists C = \text{CIR}$ .  
 Teo di Eulero

$$C \in m \Rightarrow \overline{VP} = \overline{\omega} \wedge \overline{CP} \Rightarrow \overline{CP} \perp \overline{VP}$$

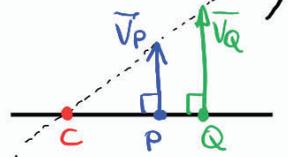
$$\overline{VQ} = \overline{\omega} \wedge \overline{CQ} \Rightarrow \overline{CQ} \perp \overline{VQ}$$



ii)  $\overline{VP} \parallel \overline{VQ}$ : • se  $\overline{VP} \neq \overline{VQ} \Rightarrow \overline{VP}, \overline{VQ} \perp \overline{PQ}$

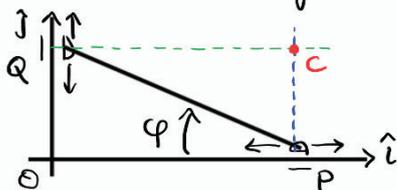
$$\left( \begin{array}{l} \text{ipotesi: teo Rivals} \Rightarrow \overline{VP} - \overline{VQ} = \overline{\omega} \wedge \overline{QP} \\ \overline{VP} \parallel \overline{VQ} \Rightarrow \exists \hat{n} = \frac{\overline{VP}}{|\overline{VP}|} = \frac{\overline{VQ}}{|\overline{VQ}|} \end{array} \right) \Rightarrow (|\overline{VP}| - |\overline{VQ}|) \hat{n} = \overline{\omega} \wedge \overline{QP} \Rightarrow \hat{n} \perp \overline{QP}$$

A questo punto la tesi segue da una elementare proporzione sui triangoli simili  $\triangle CPV_P, \triangle CQV_Q$ .



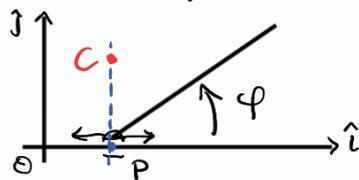
• se  $\overline{VP} = \overline{VQ} \Rightarrow$  adun traslatorio ( $C = \text{CIR}$  "all' infinito");

Esempi: (1) Asta rigida di lunghezza  $L$ , con entrambi gli estremi vincolati tramite correlli ad assi fissi



$$\left. \begin{array}{l} \overline{VP} = v_P \hat{i} \\ \overline{VQ} = v_Q \hat{j} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_C = L \cos \varphi \\ y_C = L \sin \varphi \end{cases}$$

(2) Asta rigida libera di ruotare con un estremo vincolato a muoversi lungo un'asse fisso



$$\left. \begin{array}{l} \overline{VP} = v_P \hat{i} \\ \overline{\omega} = \dot{\varphi} \hat{k} \\ \overline{PC} = \lambda \overline{\omega} + \frac{\overline{\omega} \wedge \overline{VP}}{|\overline{\omega}|^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = 0 \Leftrightarrow C \in \text{piano} \langle \hat{i}, \hat{j} \rangle \\ \overline{XC} = \overline{OP} + \overline{PC} = x_P \hat{i} + \frac{1}{\dot{\varphi}^2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ v_P & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = x_P \hat{i} + \frac{v_P}{\dot{\varphi}} \hat{j} \end{array}$$

Proposizione: In un otto di moto rigido piano esiste sempre un punto solidale al corpo rigido  $A \in \mathcal{C}$  che ha istantaneamente accelerazione nulla.

Se  $\overline{\omega} \neq \vec{0}$  e/o  $\dot{\overline{\omega}} \neq \vec{0}$ , allora  $A$  è unico e la sua posizione rispetto a qualsiasi altro punto del corpo rigido  $Q \in \mathcal{C}$  soddisfa

$$\overline{QA} = \frac{\dot{\overline{\omega}} \wedge \overline{AQ} - \overline{\omega} \wedge (\overline{\omega} \wedge \overline{AQ})}{|\dot{\overline{\omega}}|^2 + |\overline{\omega}|^4}$$

OSS: Non-unicità di  $A$  per moti traslatori

dim: Moto piano  $\Rightarrow \exists \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  terzina fissa t.c.  $\bar{\omega} // \hat{k} \Rightarrow \bar{\omega} = \omega \hat{k}, \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega} \hat{k}$  ( $\omega, \dot{\omega} \in \mathbb{R}$ )  
 Legge distrib. accel. (Rivolo)  $\Rightarrow \bar{a}_P = \bar{a}_Q + \dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{Q}P + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{Q}P) = \bar{a}_Q + \dot{\omega} \hat{k} \wedge \bar{Q}P - \omega^2 \bar{Q}P$   
 Siamo ora  $P=A$  t.c.  $\bar{a}_A = \bar{0}$  e  $\bar{Q}A = \lambda \bar{a}_Q + \mu \hat{k} \wedge \bar{a}_Q$  ( $\bar{a}_Q, \hat{k} \wedge \bar{a}_Q$  base di  $\mathbb{R}^2 \perp \hat{k}$ )  
 $\Rightarrow \bar{0} = \bar{a}_A = \bar{a}_Q + \dot{\omega} \hat{k} \wedge (\lambda \bar{a}_Q + \mu \hat{k} \wedge \bar{a}_Q) - \omega^2 (\lambda \bar{a}_Q + \mu \hat{k} \wedge \bar{a}_Q)$   
 $= \bar{a}_Q + \lambda \dot{\omega} \hat{k} \wedge \bar{a}_Q - \mu \dot{\omega} \bar{a}_Q - \lambda \omega^2 \bar{a}_Q - \mu \omega^2 \hat{k} \wedge \bar{a}_Q$   
 $= (1 - \mu \dot{\omega} - \lambda \omega^2) \bar{a}_Q + (\lambda \dot{\omega} - \mu \omega^2) \hat{k} \wedge \bar{a}_Q$   
 $\Rightarrow \begin{cases} \omega^2 \lambda + \dot{\omega} \mu = 1 \\ \dot{\omega} \lambda - \omega^2 \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{\omega^2}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}, \mu = \frac{\dot{\omega}}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}$   
 $\Rightarrow \bar{Q}A = \lambda \bar{a}_Q + \mu \hat{k} \wedge \bar{a}_Q = \frac{\omega^2}{\dot{\omega}^2 + \omega^4} (-\hat{k} \wedge (\hat{k} \wedge \bar{a}_Q)) + \frac{\dot{\omega}}{\dot{\omega}^2 + \omega^4} \hat{k} \wedge \bar{a}_Q = \frac{-\bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{a}_Q) + \dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{a}_Q}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}$

### 3.3) CINEMATICA RELATIVA

Obiettivo: determinare la relazione tra le due descrizioni associate a diversi sistemi di riferimento dello stesso moto di un corpo (rigido).

OSS: Dai postulati della Meccanica Newtoniana segue che:

- $\exists$  tempo assoluto  $\Rightarrow$  la simultaneità di due eventi non dipende dal sist. di rif. (due eventi sono simultanei in un dato sist. di rif. se e solo se sono simultanei in ogni altro sist. di rif.  $\hookrightarrow$  sincronizzabilità degli orologi)
- $\exists$  spazio assoluto  $\Rightarrow$  la distanza spaziale tra due punti non dipende dal sist. di rif. ( $\hookrightarrow$  esistenza dei corpi rigidi)

Siamo  $S = (\Theta; \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ ,  $S' = (\Theta'; \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\})$  due sistemi di rif. omogenei.

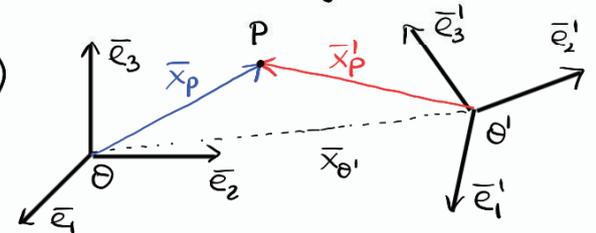
$\Theta, \Theta' \in \mathcal{E}^3$  punti dello spazio Euclideo

$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}, \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\} \in \mathbb{R}^3$  terne ortonormali (destre)

In generale,  $S$  e  $S'$  saranno in moto uno rispetto all'altro. Scegliamo arbitrariamente di considerare  $S$  come sist. di rif. fisso

$\Rightarrow \Theta, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  indipendenti dal tempo

$\Theta', \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$  dipendenti dal tempo.



Consideriamo ora il moto di un punto materiale  $t \in \mathbb{R} \mapsto P(t) \in \mathcal{E}^3$ :

$\bar{O}P(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \bar{e}_i \simeq \bar{x}_P(t) =$ posizione di P rispetto ad S	$\bar{O}'P(t) = \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \bar{e}'_i(t) \simeq \bar{x}'_P(t) =$ posizione di P rispetto ad S'
$\bar{V}_P(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t) \bar{e}_i =$ velocità di P rispetto ad S	$\bar{V}'_P(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i(t) \bar{e}'_i(t) =$ velocità di P rispetto ad S'
$\bar{a}_P(t) = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i(t) \bar{e}_i =$ accelerazione di P rispetto ad S	$\bar{a}'_P(t) = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}'_i(t) \bar{e}'_i(t) =$ accelerazione di P rispetto ad S'

Teorema di Galileo: Con le ipotesi e le convenzioni fissate sopra si ha:

- $\exists!$   $R(t) \equiv R =$  matrice di rotazione t.c.  $\bar{x}_P = \bar{x}_{\Theta 1} + R \bar{x}'_P$
- $\exists!$   $\bar{\omega}(t) \equiv \bar{\omega} =$  velocità angolare t.c.  $\bar{V}_P = \bar{V}_{\Theta 1} + \bar{\omega} \wedge \bar{x}'_P + \bar{V}'_P$   
 velocità di traslazione (traslazioni più rotazioni)

oss: Si può sempre pensare ad  $S'$  come ad un sist. di rif. solidale con un corpo rigido. In quest'ottica,  $\bar{\omega}$  è il vettore di Poisson del corpo rigido

dim: 1)  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}, \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\} =$  base ortogonali destre  $\Rightarrow \exists! R = (R_{ij})$  rotazione l.c.  $\bar{e}_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} \bar{e}'_j$

$$\Leftrightarrow R_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}'_j \Leftrightarrow \bar{e}'_j = \sum_i (\bar{e}_i \cdot \bar{e}'_j) \bar{e}_i = \sum_i R_{ij} \bar{e}_i = \sum_i R_{ji}^T \bar{e}_i$$

$$\Rightarrow \bar{x}_p = \overline{OP} = \overline{O\Theta'} + \overline{\Theta'P} = \sum_i (\theta\theta')_i \bar{e}_i + \sum_j x'_j \bar{e}'_j = \sum_i [(\theta\theta')_i + \sum_j x'_j R_{ij}] \bar{e}_i \approx \bar{x}_{\Theta'} + R \bar{x}'_p$$

2)  $\bar{v}_p = \dot{\bar{x}}_p = \frac{d}{dt} \left[ \sum_i (\theta\theta')_i \bar{e}_i + \sum_j x'_j \bar{e}'_j \right] = \sum_i (\dot{\theta}\theta')_i \bar{e}_i + \sum_j [\dot{x}'_j \bar{e}'_j + x'_j \dot{\bar{e}}'_j] = (\text{Teo Poisson})$

$$= \bar{v}_{\Theta'} + \bar{v}'_p + \sum_j x'_j \bar{\omega} \wedge \bar{e}'_j = \bar{v}_{\Theta'} + \bar{v}'_p + \bar{\omega} \wedge \bar{x}'_p$$

Teorema di Coriolis: Con le ipotesi e le convenzioni fissate sopra si ha:

$$\bar{a}_p = \bar{a}'_p + \bar{a}_{\Theta'} + \underbrace{\bar{\omega} \wedge \bar{x}'_p}_{\text{acc. centripeta}} + \underbrace{2 \bar{\omega} \wedge \bar{v}'_p}_{\text{acc. di Coriolis}}$$

acc. di trascinamento = acc. che avrebbe P se fosse solidale con  $\Theta'$

dim:  $\bar{a}_p = \dot{\bar{v}}_p = \frac{d}{dt} (\bar{v}'_p + \bar{\omega} \wedge \bar{x}'_p + \bar{v}_{\Theta'})$  Poisson

$$\frac{d}{dt} \bar{v}'_p = \frac{d}{dt} \sum_i \dot{x}'_i \bar{e}'_i = \sum_i (\ddot{x}'_i \bar{e}'_i + \dot{x}'_i \dot{\bar{e}}'_i) \stackrel{\downarrow}{=} \bar{a}'_p + \sum_i \dot{x}'_i \bar{\omega} \wedge \bar{e}'_i = \bar{a}'_p + \bar{\omega} \wedge \bar{v}'_p$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\omega} \wedge \bar{x}'_p = \dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{x}'_p + \bar{\omega} \wedge \frac{d}{dt} \sum_i x'_i \bar{e}'_i = \dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{x}'_p + \bar{\omega} \wedge \sum_i [\dot{x}'_i \bar{e}'_i + x'_i \dot{\bar{e}}'_i]$$

$$= \dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{x}'_p + \bar{\omega} \wedge [\bar{v}'_p + \sum_i x'_i (\bar{\omega} \wedge \bar{e}'_i)] = \dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{x}'_p + \bar{\omega} \wedge \bar{v}'_p + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{x}'_p)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{v}_{\Theta'} = \bar{a}_{\Theta'}$$

Def: Due sistemi di riferimento  $S, S'$  sono detti inerziali se misurano le stesse accelerazioni:

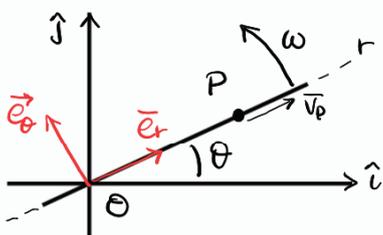
$$\bar{a}_p = \bar{a}'_p \quad \forall p \in \mathcal{E}^3$$

oss:  $S, S'$  inerziali  $\Leftrightarrow \bar{a}_{\Theta'} = \bar{0}, \bar{\omega} = \bar{0}, \dot{\bar{\omega}} = \bar{0} \Leftrightarrow S'$  in moto rettilineo unif. rispetto a  $S$

oss: L' "inerzialità" è una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica, transitiva)  
 $\hookrightarrow$  classi di equivalenza di sistemi di riferimento (relatività galileiana)

oss: Nozione istantanea, a tempo fissato, ma riguarda le accelerazioni dei moti.

Esempio: Punto materiale in moto uniforme lungo una guida rettilinea ruotante



La guida  $r$  ruota attorno al punto fisso  $\Theta$  con velocità angolare costante  $\bar{\omega}(t) = \omega(t) \hat{k}$  (adm rigido rotatorio piano)

$\hookrightarrow S = (\Theta, \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}) =$  sist. di rif. fisso

$S' = (\Theta, \{\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \hat{k}\}) =$  sist. di rif. solidale con  $r$

$$\Theta' = \Theta \Rightarrow \bar{v}_{\Theta'} = \bar{0}, \bar{a}_{\Theta'} = \bar{0}$$

$$P \text{ in moto rettilineo unif. rispetto a } S' \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}'_p = v \bar{e}_r & v \in \mathbb{R} \text{ costante} \\ \bar{x}'_p = (r_0 + vt) \bar{e}_r, & \bar{a}'_p = \bar{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{v}_p = \bar{v}'_p + \bar{v}_{\Theta'} + \bar{\omega} \wedge \bar{x}'_p = v \bar{e}_r + \bar{0} + \omega \hat{k} \wedge (r_0 + vt) \bar{e}_r = v \bar{e}_r + \omega (r_0 + vt) \bar{e}_\theta$$

$$\bar{a}_p = \bar{a}'_p + \bar{a}_{\Theta'} + \dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{x}'_p + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{x}'_p) + 2 \bar{\omega} \wedge \bar{v}'_p = \dot{\omega} \hat{k} \wedge (r_0 + vt) \bar{e}_r + \omega \hat{k} \wedge (\omega \hat{k} \wedge (r_0 + vt) \bar{e}_r) + 2 \omega \hat{k} \wedge v \bar{e}_r$$

$$= \dot{\omega} (r_0 + vt) \bar{e}_\theta + \omega^2 (r_0 + vt) (-\bar{e}_r) + 2 \omega v \bar{e}_\theta = \underbrace{-\omega^2 (r_0 + vt) \bar{e}_r}_{\text{acc. centripeta}} + \underbrace{[\dot{\omega} (r_0 + vt) + 2 \omega v] \bar{e}_\theta}_{\text{acc. Coriolis}}$$

oss:  $\bar{a}'_p = \bar{0} \neq \bar{a}_p \Rightarrow S$  e  $S'$  non sono inerziali.

(Infatti  $S'$  ruota rispetto ad  $S$ )





OSS: vincolo bilatero  $\leftrightarrow \forall A$  adun virtuale è reversibile  
 vincolo unilatero  $\leftrightarrow \exists A$  adun virtuale non reversibile

OSS: vincolo fisso  $\leftrightarrow A_0 = \{(P_i, \vec{0})\}_{i=1, \dots, N}$  è adun virtuale annullabile  
 vincolo mobile  $\leftrightarrow A_0$  non è un adun virtuale annullabile.

Def: Le coordinate libere (coord. generalizzate, coord. Lagrangiane) sono un insieme minimale di parametri che individuano univocamente la configurazione di un dato sistema meccanico.

Il numero di gradi di libertà di un sistema è la cardinalità di un qualsiasi insieme di coord. libere.

Def: Un sistema meccanico con  $g \in \mathbb{N}$  gradi di libertà è detto:

- ipostatico (labile) se  $g > 0 \leftrightarrow$  moti possibili  $\leftrightarrow$  dinamica;
- isostatico se  $g = 0$  e rimuovendo un vincolo il sistema diventa labile;
- iperstatico se  $g = 0$  e si possono rimuovere vincoli senza renderlo labile. } statica.

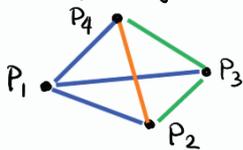
Nel seguito si presentano due metodi per determinare il numero di gradi di libertà nel caso di sistemi soggetti a vincoli olonomi bilateri.

Metodo del bilancio (euristico)

$$\left. \begin{array}{l} g_0 = \# \text{gdI del sistema con tutti i vincoli rimossi} \\ M = \# \text{equazioni dei vincoli "efficaci"} \\ g = \# \text{gdI del sistema soggetto a vincoli} \end{array} \right\} \Rightarrow g = g_0 - M$$

Algoritmo ricorsivo ( $n \in \mathbb{N}$ )  
 $\rightarrow$  finire  $n$  coord.  
 $n \rightarrow n+1$  il sistema può muoversi  
 SI  $\leftarrow$  NO  $\rightarrow g = n$

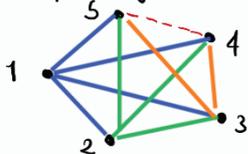
Esempi: (1) Corpo rigido formato da 4 punti materiali



$$\left. \begin{array}{l} g_0 = 3 \times 4 = 12 \\ \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad 3D \quad \quad \quad \# \text{pt.} \\ M = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 \\ \quad \quad \quad d_{12} \quad d_{13} \quad d_{14} \quad d_{23} \quad d_{34} \quad d_{24} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} g = g_0 - M = 12 - 6 = 6 \\ \hookrightarrow 3 \text{ gdl traslazionali} \\ \quad + 3 \text{ gdl rotazionali} \end{array} \right\}$$

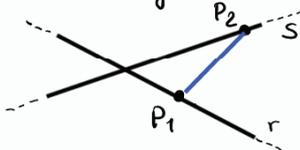
(2) Corpo rigido formato da 5 punti materiali



$$\left. \begin{array}{l} g_0 = 3 \times 5 = 15 \\ M = 4 + 3 + 2 + 0 \\ \quad \quad \quad d_{45} \text{ è superfluo} \rightarrow \text{non è vincolo efficace} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} g = g_0 - M = 15 - 9 = 6 \\ \hookrightarrow 3 \text{ Traslazionali} \\ \quad + 3 \text{ rotazionali.} \end{array} \right\}$$

(3) Asta rigida con estremi vincolati ad assi fissi



$$\left. \begin{array}{l} g_0 = 3 \times 2 = 6 \\ \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad 3D \quad \quad \quad 2 \text{ pt. estremi} \\ M = 2 + 2 + 1 = 5 \\ \quad \quad \quad P_1 \in r \quad P_2 \in s \quad d_{12} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} g = g_0 - M = 6 - 5 = 1 \\ \hookrightarrow \text{angolo di rotazione di } P_1 P_2 \\ \quad \text{nel piano generato da } r, s. \end{array} \right\}$$

Metodo analitico (rigoroso)

Def: Dei vincoli  $F_1, \dots, F_M$  olonomi e bilateri sono detti:

- compatibili se possono essere soddisfatti tutti contemporaneamente:

$$\exists (P_1, \dots, P_N) \in \mathcal{E}^d \times \dots \times \mathcal{E}^d \text{ t.c. } F_i(P_1, \dots, P_N, t) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (d = 1, 2, 3)$$

- indipendenti se il rango della matrice Jacobiana associata è massimale:

$$J = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, M \\ j=1, \dots, dN}} \Rightarrow \text{rk}(J) = M.$$

Teorema: In un sistema formato da  $N$  pt. materiali e sottoposto a  $M$  vincoli olonomi, bilateri, compatibili e indipendenti, il numero di gradi di libertà è

$$g = dN - M \quad (g=0 \text{ se } M > dN)$$

dim: applicazione del teorema della funzione implicita di Dimi.

Esempi: (1) Punto vincolato su due rette parallele

Coordinate  $\bar{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$   
 Vincolo r:  $y = 1 \rightarrow F_1(\bar{x}) = y - 1$   
 Vincolo s:  $y = 2 \rightarrow F_2(\bar{x}) = y - 2$   
 $\forall y \in \mathbb{R}$  t.c.  $F_1 = 0$  e  $F_2 = 0$   
 $\rightarrow$  vincoli non compatibili

(2) Punto vincolato ad un piano e ad una circonferenza nel piano

Coordinate  $\bar{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$   
 Vincolo  $\pi$ :  $z = 0 \rightarrow F_1(\bar{x}) = z$   
 Vincolo  $C$ :  $x^2 + y^2 = l^2 \rightarrow F_2(\bar{x}) = x^2 + y^2 - l^2$   
 $z = 0 \rightarrow F_3(\bar{x}) = z$   
 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 $\text{rk } J = 2 < 3 = \# \text{ vincoli}$   
 $\hookrightarrow$  vincoli non indep.

(3) Corpo rigido formato da 2 punti materiali

Coordinate  $\bar{x} = (x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 2} = \mathbb{R}^6$   
 Vincolo rigidità:  $F(\bar{x}) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - d_{12}^2 \rightarrow M = 1$   
 Unico vincolo  $\rightarrow$  assolutamente compatibile e indipendente  $\Rightarrow g = 3N - M = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

(4) Corpo rigido formato da 3 punti materiali

Coordinate:  $\bar{x} = (x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} = \mathbb{R}^9$   
 Vincolo 1-2:  $F_3(\bar{x}) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - d_{12}^2$   
 Vincolo 2-3:  $F_1(\bar{x}) = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 - d_{23}^2$   
 Vincolo 3-1:  $F_2(\bar{x}) = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - d_{31}^2$   
 $M = 3$

Vincoli chiaramente compatibili.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2(x_2 - x_3) & 2(y_2 - y_3) & 2(z_2 - z_3) & 2(x_3 - x_2) & 2(y_3 - y_2) & 2(z_3 - z_2) \\ 2(x_1 - x_3) & 2(y_1 - y_3) & 2(z_1 - z_3) & 0 & 0 & 0 & 2(x_3 - x_1) & 2(y_3 - y_1) & 2(z_3 - z_1) \\ 2(x_1 - x_2) & 2(y_1 - y_2) & 2(z_1 - z_2) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 2(z_2 - z_1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(x_1, y_1, z_1) \neq (x_2, y_2, z_2) \neq (x_3, y_3, z_3) \Rightarrow \text{rk } J = 3$  (Esercizio)  $\Rightarrow g = 3N - M = 3 \cdot 3 - 3 = 6$ .

Esercizio: Studiare il caso in cui  $(x_2, y_2, z_2) = (x_3, y_3, z_3)$   
 Studiare il caso di 2 punti materiali

(5) Aste rigide con estremi vincolati ad assi ortogonali

Coordinate  $\bar{x} = (x_1, y_1; x_2, y_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} = \mathbb{R}^4$   
 Vincolo 1- $\hat{i}$ :  $F_1(\bar{x}) = y_1$   
 Vincolo 2- $\hat{j}$ :  $F_2(\bar{x}) = x_2$   
 Vincolo 1-2:  $F_3(\bar{x}) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2$   
 1! coord. libera (es:  $x_1, y_2, \theta, \dots$ )

Compatibilità ovvia

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2(x_1 - x_2) & 2(y_1 - y_2) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk } J = 3 = M \Rightarrow g = 2N - M = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

(Esercizio)

(6) Due aste rigide collegate tra loro e collegate agli assi

Coordinate  $\bar{x} = (x_1, y_1; x_2, y_2; x'_2, y'_2; x_3, y_3) \in \mathbb{R}^{2 \times 4} = \mathbb{R}^8$   
 Vincolo 1- $\hat{i}$ :  $F_1(\bar{x}) = y_1$   
 Vincolo 3- $\hat{j}$ :  $F_2(\bar{x}) = x_3$   
 Vincolo 1-2:  $F_3(\bar{x}) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - a^2$   
 $M = 6$

Vincolo 2-3:  $F_4(\bar{x}) = (x_2' - x_3')^2 + (y_2' - y_3')^2 - b^2$   
 Vincolo 2-2':  $F_5(\bar{x}) = x_2 - x_2'$   
 $F_6(\bar{x}) = y_2 - y_2'$

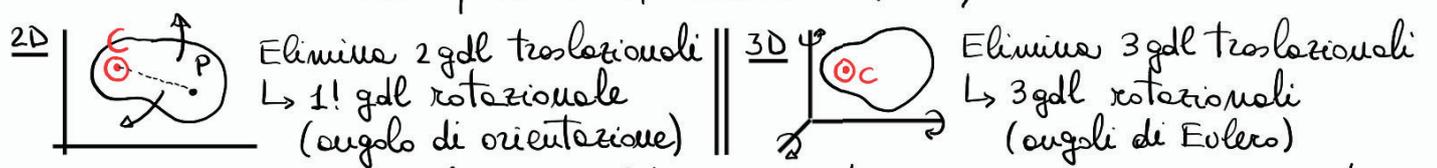
$g = 2N - M = 8 - 6 = 2$   
 (es:  $(x_1, y_1), (\theta_1, \theta_2), \dots$ )

Ovviamente compatibili

$J = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2(x_1 - x_2) & 2(y_1 - y_2) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(x_2' - x_3') & 2(y_2' - y_3') & 2(x_3 - x_2) & 2(y_3 - y_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk } J = 6$

Particolari tipologie di vincoli per corpi rigidi

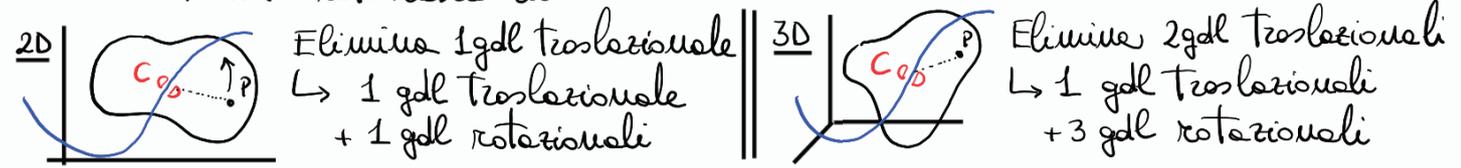
1) Cerniera fissa: vincolo olonomo fiso bilatero che blocca la posizione di un punto del corpo rigido, lasciando il resto del corpo libero di ruotargli attorno.  
 $\Rightarrow$  Moto polare:  $\bar{v}_P = \bar{\omega} \wedge \bar{C}P \quad \forall P \in \mathcal{C}, \quad C = \text{cerniera fissa}$



2) Cerniera mobile: vincolo olonomo bilatero che costringe a coincidere due punti appartenenti a due corpi rigidi distinti, lasciando i due corpi liberi di ruotare uno rispetto all'altro.

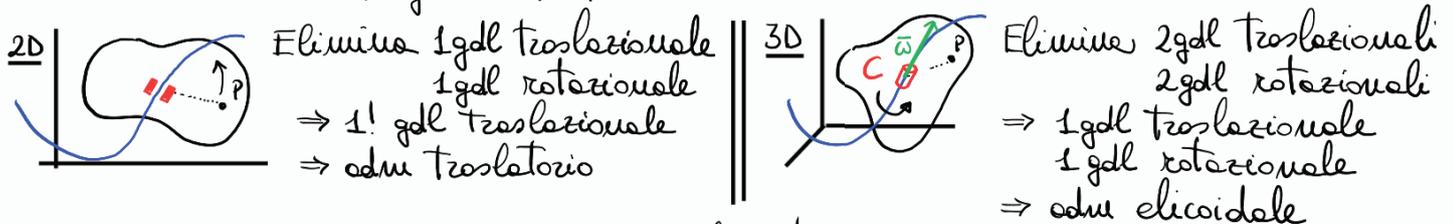
Esempio: due aste reciprocamente vincolate ad un estremo

3) Carrello: vincolo olonomo bilatero che costringe un punto del corpo rigido a muoversi lungo una curva fissata, lasciando il resto del corpo libero di ruotargli attorno.  
 $\Rightarrow \exists C \in (\text{traiettoria regolare}) \cap \mathcal{C}$  t.c.  $\bar{v}_C(t) = v_C(t) \hat{T}(t) \Rightarrow \bar{v}_P = \bar{v}_C + \bar{\omega} \wedge \bar{C}P$   
 $\Rightarrow$  moto rototraslatorio.



4) Manicotto: vincolo olonomo bilatero che costringe un punto del corpo rigido a muoversi lungo una curva fissata, lasciando il resto del corpo libero di ruotare ma solo con velocità angolare parallela alla direzione tangente alla curva.

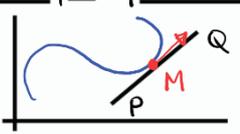
$\Rightarrow \exists C \in (\text{traiettoria regolare}) \cap \mathcal{C}$  t.c.  $\bar{v}_C = v_C \hat{T}, \bar{\omega} = \omega \hat{T} \Rightarrow \bar{v}_P = \bar{v}_C + \bar{\omega} \wedge \bar{C}P$



4a) Pattino = manicotto che impedisce anche la rotazione  $\Rightarrow$  adu traslatorio  
 (2D  $\Rightarrow$  pattino  $\equiv$  manicotto)

4b) Incastro = manicotto che impedisce rotazione e traslazione  $\Rightarrow$  sistema in quiete

Esempio: pattino di Chaplygin: modello di pattino su ghiaccio che non derapa, idealizzato come un'asta rigida libera di muoversi nel piano con velocità del punto medio sempre parallela all'asta.



$$\vec{v}_M // \vec{PQ} \forall t \Leftrightarrow \vec{v}_M \wedge \vec{PQ} = \vec{0} \forall t \quad \Rightarrow \quad \vec{0} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x}_M & \dot{y}_M & 0 \\ l \cos \theta & l \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = l(\dot{x}_M \sin \theta - \dot{y}_M \cos \theta) \hat{k}$$

$$\vec{v}_M = (\dot{x}_M, \dot{y}_M, 0), \vec{PQ} = (l \cos \theta, l \sin \theta, 0)$$

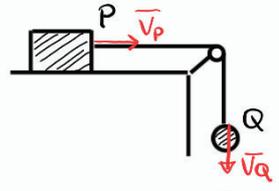
Verifichiamo che si tratta di un vincolo anonomo (non integrabile)

PA:  $\exists F(\theta, x_M, y_M)$  t.c.  $\dot{F} = \dot{x}_M \sin \theta - \dot{y}_M \cos \theta$

D'altra parte  $\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial F}{\partial x_M} \dot{x}_M + \frac{\partial F}{\partial y_M} \dot{y}_M$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_M} &= \sin \theta \rightarrow F(x_M, y_M, \theta) = x_M \sin \theta + G(y_M, \theta) \\ \frac{\partial F}{\partial y_M} &= -\cos \theta \rightarrow G(y_M, \theta) = -y_M \cos \theta + H(\theta) \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= 0 \rightarrow x_M \cos \theta + y_M \sin \theta + H'(\theta) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

5) Filo inestendibile: si ricordi che la lunghezza di una curva può essere espressa usando l'ascissa curvilinea.

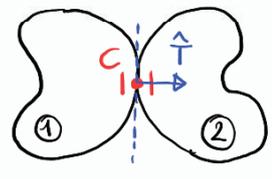


$$l_{PQ} = s_Q(t) - s_P(t) = \text{costante} \Rightarrow 0 = \dot{l}_{PQ} = \dot{s}_Q - \dot{s}_P = \vec{v}_Q \cdot \hat{T}_Q - \vec{v}_P \cdot \hat{T}_P$$

$$\vec{v}_P = \dot{s}_P \hat{T}_P, \vec{v}_Q = \dot{s}_Q \hat{T}_Q \Rightarrow \boxed{\vec{v}_P \cdot \hat{T}_P = \vec{v}_Q \cdot \hat{T}_Q \quad \forall P, Q \in \text{filo}}$$

OSS: vale per tratti liberi di filo, cioè per tratti con profilo geometrico liscio

6) Vincolo di contatto: vincolo che costringe due corpi rigidi ad avere un punto di frontiera in comune.



$C =$  punto di contatto  $\left\langle \begin{array}{l} C_1 \text{ se lo si pensa come punto del corpo rigido } E_1 \\ C_2 \text{ " " " " " " " " " " } E_2 \end{array} \right.$

$$\left. \begin{aligned} \hat{N} &= \text{versore normale esterno al bordo di } E_1 \\ -\hat{N} &= \text{" " " " " " " " } E_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{C_1} \cdot \hat{N} = \vec{v}_{C_2} \cdot \hat{N}}$$

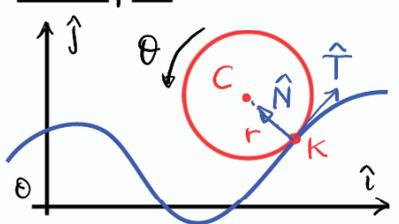
OSS:  $\vec{v}_{C_1} \cdot \hat{N} < \vec{v}_{C_2} \cdot \hat{N} \Rightarrow E_1$  resta indietro rispetto a  $E_2 \Rightarrow$  distacco di  $E_1$  e  $E_2$   
 $\vec{v}_{C_1} \cdot \hat{N} > \vec{v}_{C_2} \cdot \hat{N}$  escluso da impenetrabilità di  $E_1, E_2$  (urto, reazione vincolare, ...)

OSS: in generale i due corpi rigidi possono strisciare uno sull'altro  
 $\vec{v}_{C_1} - \vec{v}_{C_2} = [\vec{v}_{C_1} - (\vec{v}_{C_1} \cdot \hat{N}) \hat{N}] - [\vec{v}_{C_2} - (\vec{v}_{C_2} \cdot \hat{N}) \hat{N}] = \vec{v}_{C_1 //} - \vec{v}_{C_2 //} =$  velocità di strisciamento

7) Vincolo di puro rotolamento: vincolo di contatto in assenza di strisciamento

$$\vec{v}_{C_1 //} = \vec{v}_{C_2 //} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{C_1} = \vec{v}_{C_2}}$$

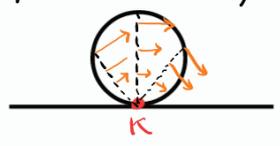
Esempio: disco che rotola senza strisciare su una guida piana



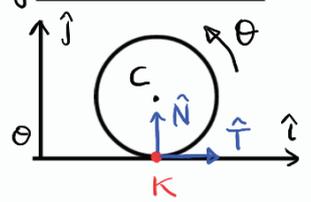
$s =$  ascissa curvilinea  $r =$  raggio del disco  
 $\hat{T} =$  versore tangente  $\theta =$  angolo di rotazione del disco  
 $\hat{N} =$  versore normale  $C =$  centro del disco.  
 $K =$  pt. di contatto tra guida ( $K_g$ ) e disco ( $K_d$ ).

$$\left. \begin{aligned} \text{vincolo di contatto} &\Rightarrow |\overline{CK}| = r \Rightarrow \overline{KC} = r \hat{N}(s(t)) \\ \text{vincolo di puro rotolamento} &\Rightarrow \vec{v}_{K_g} = \vec{v}_{K_d} \\ \text{guida fissa} &\Rightarrow \vec{v}_{K_g} = \vec{0} \\ \text{disco = corpo rigido} &\Rightarrow \vec{v}_C = \vec{v}_{K_d} + \vec{\omega} \wedge \overline{K_d C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{v}_C = \vec{0} + (\dot{\theta} \hat{k}) \wedge (r \hat{N}(s(t))) = r \dot{\theta} (-\hat{T}(s(t)))$$

adm con CIR  $\equiv K$



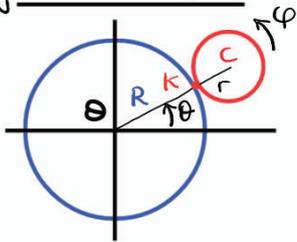
• guida rettilinea



$$\left. \begin{aligned} s &= x_K = x_C \\ \hat{T} &= \hat{i} \\ \hat{N} &= \hat{j} \end{aligned} \right\} \text{ori fissi} \Rightarrow \vec{v}_C = -r \dot{\theta} \hat{i} \rightarrow \vec{x}_C(t) = \vec{x}_C(0) - r \theta(t) \hat{i} = (x_0 - r \theta(t)) \hat{i} + r \hat{j}$$

Vincolo integrabile che elimina 2 gdl  
 $\hookrightarrow$  1! gdl ( $x_C$  oppure  $\theta$ )

• guida circolare



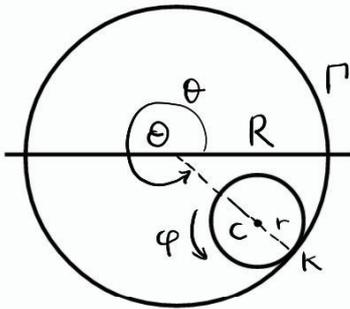
$$\left. \begin{aligned} K \in \text{guida fissa} &\Rightarrow \bar{v}_K = \bar{0} \\ K \in \text{disco} &\Rightarrow \bar{v}_K = \bar{v}_C + \bar{\omega}_\varphi \wedge \overline{CK} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{0} = \bar{v}_C + \dot{\varphi} \hat{k} \wedge (-r \bar{e}_r) \Rightarrow \bar{v}_C = r \dot{\varphi} \bar{e}_\theta$$

$$C \in \text{circa } OC \Rightarrow \bar{v}_C = \bar{v}_O + \bar{\omega}_\theta \wedge \overline{OC} \Rightarrow \bar{v}_C = (R+r) \dot{\theta} \bar{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{R+r}{r} \dot{\theta}$$

Esercizio: Un disco di centro C e raggio r rotola senza strisciare su una guida circolare  $\Gamma$  di centro O e raggio  $R > r$ . Determinare:

- # gdl / coord. libere;
- possibili adms del sistema



$$\left. \begin{aligned} \text{a) disco libero} &\Rightarrow 3 \text{ gdl: } 2 \text{ traslazionali} \leftrightarrow (x_C, y_C) \in \mathbb{R}^2 \\ &1 \text{ rotazionale} \leftrightarrow \varphi \in [0, 2\pi) \\ \text{vincolo puro rotolamento: contatto} &\leftrightarrow \text{dist}(C, \Gamma) = r \\ &\text{senza strisciamento} \end{aligned} \right\} g = 3 - 2 = 1$$

$$\bar{x}_C = \overline{OC} = (R-r)(\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) = (R-r) \bar{e}_R(t)$$

$$\bar{v}_C = \dot{\bar{x}}_C = (R-r) \dot{\theta} \bar{e}_\theta$$

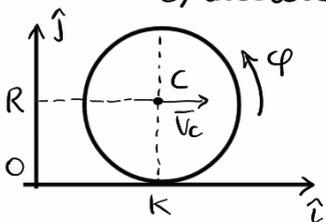
$$\left. \begin{aligned} K \in \text{disco} &\Rightarrow \bar{v}_K = \bar{v}_C + \bar{\omega}_\varphi \wedge \overline{CK} = (R-r) \dot{\theta} \bar{e}_\theta + (\dot{\varphi} \hat{k}) \wedge (r \bar{e}_r) = [(R-r) \dot{\theta} + r \dot{\varphi}] \bar{e}_\theta \\ K \in \text{guida} &\Rightarrow \bar{v}_K = \bar{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{r}{R-r} \dot{\varphi}$$

vincolo oloonomo integrabile  $\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 - \frac{r}{R-r} (\varphi(t) - \varphi_0)$  vincolo oloonomo  $\Rightarrow 1$  coord. ( $\theta$  o  $\varphi$ )

$$\left. \begin{aligned} \text{b) } \bar{\omega}_\varphi = \dot{\varphi} \hat{k} \neq \bar{0} \\ I = \bar{\omega}_\varphi \cdot \bar{v}_K = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{adms rotatorio con CIR} = K \text{ (teo Nozi/Eulero).}$$

Esercizio: Un disco di raggio R si muove restando appoggiato ad una guida fissa orizzontale. Il disco è libero di rotore e strisciare sulla guida. Determinare:

- # gdl / coord. libere;
- possibili adms del sistema;
- accelerazione del punto di contatto.



$$\left. \begin{aligned} \text{a) disco libero} &\Rightarrow 3 \text{ gdl: } (x_C, y_C, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \\ \text{vincolo di contatto} &\Rightarrow y_C = R \\ \text{Coord. libere: } &(x_C, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \end{aligned} \right\} g = 3 - 1 = 2$$

$$\bar{x}_C = \overline{OC} = x_C \hat{i} + R \hat{j} \Rightarrow \bar{v}_C = \dot{\bar{x}}_C \hat{i} \Rightarrow \bar{v}_P = \bar{v}_C + \bar{\omega} \wedge \overline{CP} \quad \forall P \in \text{disco.}$$

$$P = K \in \text{disco} \Rightarrow \bar{v}_K = \bar{v}_C + \bar{\omega} \wedge \overline{CK} = \dot{x}_C \hat{i} + (\dot{\varphi} \hat{k}) \wedge (-R \hat{j}) = (\dot{x}_C + R \dot{\varphi}) \hat{i}$$

$$\text{b) } \bar{\omega} = \dot{\varphi} \hat{k} \neq \bar{0} \Rightarrow \text{adms rotatorio con CIR} \equiv G \text{ t.c. } \overline{PG} = \frac{\bar{\omega} \wedge \overline{v}_P}{|\bar{\omega}|^2} \quad \forall P \in \text{disco (Chasles)}$$

$$\text{Scelto } P = C \Rightarrow \overline{OG} = \overline{OC} + \overline{CG} = (x_C \hat{i} + R \hat{j}) + \frac{1}{\dot{\varphi}^2} (\dot{\varphi} \hat{k}) \wedge (\dot{x}_C \hat{i}) = x_C \hat{i} + \left(R + \frac{\dot{x}_C}{\dot{\varphi}}\right) \hat{j}$$

c) Usiamo la legge di distribuzione delle accelerazioni

$$\begin{aligned} \bar{a}_K &= \bar{a}_C + \bar{\omega} \wedge \overline{CK} + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{CK}) = \ddot{x}_C \hat{i} + (\ddot{\varphi} \hat{k}) \wedge (-R \hat{j}) + (\dot{\varphi} \hat{k}) \wedge ((\dot{\varphi} \hat{k}) \wedge (-R \hat{j})) \\ &= \ddot{x}_C \hat{i} + R \ddot{\varphi} \hat{i} - R \dot{\varphi}^2 \hat{k} \wedge (\hat{k} \wedge \hat{j}) = (\ddot{x}_C + R \ddot{\varphi}) \hat{i} + R \dot{\varphi}^2 \hat{j} \end{aligned}$$

$$\text{NB: puro rotolamento} \Rightarrow \bar{v}_K = \bar{0} \Rightarrow \dot{x}_C = -R \dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{x}_C + R \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \bar{a}_K = R \dot{\varphi}^2 \hat{j} \text{ puramente centripeta.}$$

## 4) STATICA

La cinematica trattata nel capitolo precedente si occupa di uno studio puramente descrittivo dei moti, trascurando cause ed effetti. A partire da questo capitolo si sposta l'attenzione sulle cause dei moti e sulla predizione dei moti futuri. A tal fine si considera prima la statica che si occupa dello studio degli stati di quiete, per poi passare alla dinamica analizzando moti generici.

### 4.1) Le leggi della meccanica Newtoniana

La formulazione matematica della teoria Newtoniana è fondata su osservazioni empiriche fondamentali [Galileo - Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, 1632]

#### ▷ Principio di invarianza (relatività Galileiana)

Due osservatori che siano reciprocamente in quiete o in moto rettilineo uniforme verificano che i moti dei corpi materiali sono governati dalle stesse leggi di natura.

OSS: studiando il moto dei corpi tramite esperimenti svolti nella cabina di una nave è impossibile stabilire se la nave sia ferma oppure in moto rispetto alla terra ferma.

OSS: vengono così identificate classi privilegiate di "osservatori inerziali".

#### ▷ Principio di inerzia

Rispetto ad un osservatore inerziale, ogni corpo sufficientemente lontano da tutti gli altri (limite di non-interazione) permane nello stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

OSS: "corpo"  $\equiv$  corpo elementare, senza componenti distinguibili  $\rightarrow$  pt. materiale (per sistemi più complessi vale un'affermazione analogica per i centri di massa).

Newton elabora questi concetti [Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, 1687]

▷ Primo principio: esistono sistemi di riferimento (detti "inerziali") rispetto ai quali un corpo materiale isolato si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete.

OSS: si riconduce all'esistenza di spazio e tempo assoluti.

▷ Secondo principio: in un sistema di riferimento inerziale, un corpo materiale devia dallo stato di moto rettilineo uniforme se e solo se sottoposto a forze. Inoltre, esiste una costante di proporzionalità tra accelerazione e forze:

$$m\vec{a} = \vec{F} \text{ (legge di Newton), } m = \text{massa inerziale } (m > 0)$$

OSS: definizione implicita di forza: qualcosa cosa che porta un corpo ad accelerare.

↳ concetto "assoluto": due osservatori inerziali misurano le stesse accelerazioni e, di conseguenza, le stesse forze.

↳  $\vec{F}$  codifica l'interazione di un corpo con tutti gli altri corpi nell'universo  $\Rightarrow$  accelerazione di un corpo determinata dai (posizioni e velocità di) altri corpi.

OSS: definizione implicita di massa inerziale ( $\neq$  massa gravitazionale)

↳ concetto "assoluto": proprietà intrinseca del corpo materiale, costante nel tempo

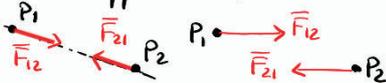
↳ fatto sperimentale:  $m_{\text{Inerz}} = m_{\text{Grav.}}$  ( $m_{\text{I}}/m_{\text{G}} \approx 10^{-15} \leadsto$  GR).

OSS: forza  $\equiv$  vettore applicato al punto materiale  $\equiv (P, \vec{F}) \in \mathcal{E}^3 \times \mathbb{R}^3$ .

Principio di sovrapposizione: il moto di un corpo soggetto ad una coppia di forze è lo stesso che si avrebbe se sul corpo agisse la risultante

$$\{(P, \vec{F}_1), (P, \vec{F}_2)\} \equiv \{(P, \vec{F}_1 + \vec{F}_2)\}$$

$\triangleright$  Terzo principio (azione/reazione): l'interazione tra due corpi è rappresentata da una coppia di forze  $(P_1, \vec{F}_{12}), (P_2, \vec{F}_{21})$  t.c.  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$



### Classificazione delle forze

Def: Dato un sistema di punti materiali, una forza che agisce su uno dei punti è detta interna se dipende esclusivamente dall'interazione con altri punti del sistema. Una forza è detta esterna se dipende da elementi che non fanno parte del sistema.

Esempi: 1)  Sistema = 2 pt. collegati da molla  $\Rightarrow$  forze elastiche interne in P, Q  
2)  Sistema = 1 pt. materiale pesante  $\Rightarrow$  forza gravitazionale esterna in P

OSS: distinzione subordinata alla definizione del sistema.

OSS: forze interne soddisfanno sempre il terzo principio; forze esterne in generale no (caso approssimazioni sottintese).

Def: Sono dette forze apparenti tutte quelle forze dovute alla non-inerzialità del sistema di riferimento considerato.

OSS: oltre a dipendere dalla configurazione del sistema, dipendono esplicitamente anche da velocità e accelerazione del sistema di riferimento considerato rispetto ad un sistema inerziale.

$\hookrightarrow$  le forze apparenti sono assenti nei sistemi di riferimento inerziali.

Esempio: Sia  $S$  un sist. di ref. inerziale,  $S'$  un sist. di ref. arbitrario e si consideri il moto di un pt. materiale  $P$  di massa  $m$ .

$$\begin{aligned} \text{Teo Coriolis} \Rightarrow \vec{F}' &= m\vec{a}'_p = m\vec{a}_p - m\vec{a}_{O'} - m\vec{\omega} \wedge \vec{x}'_p - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}'_p) - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_p \\ &= \vec{F} + \vec{F}_{O'} + \vec{F}_{\dot{\omega}} + \vec{F}_{\text{Cent.}} + \vec{F}_{\text{Cor.}} \end{aligned}$$

Def: In un sistema meccanico soggetto a vincoli cinematici, sono dette forze reattive (o reazioni vincolari) tutte quelle forze che sono esercitate dai vincoli sul sistema. Sono dette forze attive tutte quelle non reattive.

OSS: Principio delle reazioni vincolari: si assume che le azioni esercitate da un vincolo siano sempre rappresentabili come un sistema di forze.

$\hookrightarrow$  forze reattive = forze che devono essere applicate al sistema affinché siano soddisfatti i vincoli cinematici per tutti i tempi.

OSS: In generale si suppongono note le forze attive (forze peso, elastiche, elettromagnetiche) e si trattano come incognite le forze reattive (rispettando i principi di Newton).

OSS: Per un punto materiale la legge di Newton è

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{\Phi}$$

$\swarrow$  risultante forze attive       $\searrow$  risultante reazioni vincolari

Def: Una forza attiva applicata ad un punto materiale è detta:

- costante se  $\vec{F} = \text{cost.} \in \mathbb{R}^3$  (non dipende da posizione e velocità del punto e dal tempo)
- posizionale se  $\vec{F} = \vec{F}(P)$  (dipende solo dalla posizione del punto)
- centrale se è posizionale e  $\exists \theta \in \mathbb{E}^3, f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  scalare t.c.  $\vec{F}(P) = f(|\vec{OP}|) \frac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|}$
- conservativa se è posizionale e  $\exists V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{E}^3; \mathbb{R})$  potenziale t.c.  $\vec{F} = \nabla V$

NB: potenziale =  $V$  funzione scalare t.c.  $\vec{F} = \nabla V$

energia potenziale =  $U = -V$  t.c.  $E = \text{energia meccanica} \Rightarrow E = T + U$   
 $T = \text{energia cinetica}$

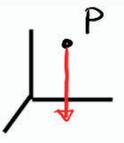
Proposizione:  $\vec{F}$  conservativa in  $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \forall \gamma$  curva chiusa  $\Leftrightarrow \nabla \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$

Oss: Vero più in generale su domini semplicemente connessi (Lemma di Poincaré).

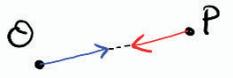
È sempre vero che  $\vec{F} = \nabla V$  con  $V \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow \nabla \wedge \vec{F} = \vec{0}$ .

Su domini non semplicemente connessi, in generale NON vale l'implicazione  $\nabla \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \exists V$  t.c.  $\vec{F} = \nabla V$  (Esempio:  $\vec{F} = -\frac{y}{x^2+y^2} \hat{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \hat{j}$  su  $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\}$ ).

Esempi: 1) Forza peso:  $\vec{F}(P) = -mg \hat{k}$ , forza attiva posizionale conservativa costante  
 potenziale  $(\partial_x V) \hat{i} + (\partial_y V) \hat{j} + (\partial_z V) \hat{k} = \vec{F} = -mg \hat{k} \Rightarrow \partial_x V = \partial_y V = 0 \Rightarrow V = -mgz + \text{cost.}$   
 $\partial_z V = -mg \Rightarrow U = mgz + \text{cost.}$



2) Forza gravitazionale:  $\vec{F}(P) = -G \frac{mM}{|\vec{OP}|^2} \frac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|}$ , forza attiva posizionale centrale conserv.  
 (~ elettrostatica)  
 potenziale  $\nabla V = \vec{F} = -G \frac{mM}{|\vec{x}|^2} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \nabla \left[ G \frac{mM}{|\vec{x}|} \right] \Rightarrow V = \frac{GmM}{|\vec{x}|} + \text{cost.}$   
 $U = -\frac{GmM}{|\vec{x}|} + \text{cost.}$



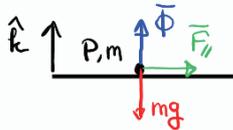
Oss: Per piccoli spostamenti, a grandi distanze da O si riduce a forza peso

$$\vec{OP} = \vec{R} + \vec{r} \text{ con } |\vec{r}| \ll |\vec{R}| \Rightarrow \vec{F} = -\frac{GmM}{|\vec{R} + \vec{r}|^2} \frac{\vec{R} + \vec{r}}{|\vec{R} + \vec{r}|} \approx -\frac{GmM}{|\vec{R}|^2} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \approx -mg \hat{k}$$

3) Forza elastica:  $\vec{F}(P) = -k \vec{OP}$  forza attiva posizionale centrale conserv.  
 potenziale  $\nabla V = \vec{F} = -k \vec{x} = \nabla \left[ -\frac{1}{2} k |\vec{x}|^2 \right] \Rightarrow V = -\frac{1}{2} k |\vec{x}|^2 + \text{cost.}$   
 $U = \frac{1}{2} k |\vec{x}|^2 + \text{cost.}$

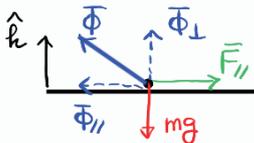


4) Appoggio liscio: consideriamo un pt. materiale P di massa m soggetto a forza peso e appoggiato su un piano su cui è libero di muoversi senza attrito (Es: levitazione magnetica)



Moto sul piano  $\Rightarrow \vec{x}(t) \perp \hat{k} \forall t \Rightarrow \vec{v}(t), \vec{a}(t) \perp \hat{k} \forall t \Rightarrow 0 = m \vec{a} \cdot \hat{k} = (\vec{F}_g + \vec{\Phi}) \cdot \hat{k}$   
 Forza peso  $\vec{F}_g = -mg \hat{k} \Rightarrow \vec{\Phi} \cdot \hat{k} = -\vec{F}_g \cdot \hat{k} = mg \Rightarrow \vec{\Phi} = mg \hat{k}$ .

5) Appoggio scabro: consideriamo un pt. materiale P di massa m soggetto a forza peso e appoggiato su un piano ruvido.



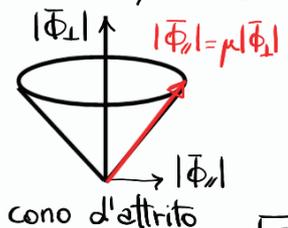
$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_\perp + \vec{\Phi}_\parallel$  con  $\vec{\Phi}_\perp = \text{reazione normale al piano} = mg \hat{k}$   
 $\vec{\Phi}_\parallel = \text{attrito radente (direzione } \perp \hat{k}, \parallel \text{ piano)}$

Fatti sperimentali: • se il punto di applicazione di  $\vec{\Phi}$  si muove con velocità  $\vec{v}$ , allora il verso di  $\vec{\Phi}_\parallel$  è opposto a quello di  $\vec{v}$ .

• legge di Coulomb-Morin

$|\vec{\Phi}_\parallel| = \mu_d |\vec{\Phi}_\perp|$ ,  $\mu_d = \text{coeff. attrito dinamico}$

$|\vec{\Phi}_\parallel| \leq \mu_s |\vec{\Phi}_\perp|$ ,  $\mu_s = \text{coeff. attrito statico}$



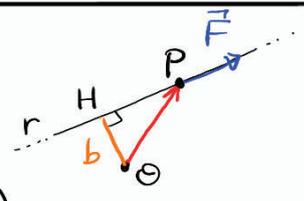
Piano inclinato:  $\vec{F} = -mg\hat{k}$

$\vec{e}_1 = \cos\varphi \hat{i} + \sin\varphi \hat{j}$   
 $\vec{e}_2 = -\sin\varphi \hat{i} + \cos\varphi \hat{j}$   
 Corpo in quiete

$\vec{\Phi}_\perp = -(\vec{F} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 = mg \cos\varphi \vec{e}_2$   
 $\vec{\Phi}_\parallel = -(\vec{F} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 = mg \sin\varphi \vec{e}_1$   
 Coulomb-Morin  $\Rightarrow \mu_s \geq \frac{|\vec{\Phi}_\parallel|}{|\vec{\Phi}_\perp|} = \tan\varphi$

Def: Date una forza  $(P, \vec{F}) \in \mathcal{E}^3 \times \mathbb{R}^3$  (vettore applicato) si definiscono

- retta di applicazione  $r =$  retta  $\parallel \vec{F}$ , passante per  $P$ ;
- momento rispetto ad un polo fisso  $\Theta$  è  $\vec{M}_\Theta := \overline{\Theta P} \wedge \vec{F} \in \mathbb{R}^3$
- braccio della forza  $b = \text{dist}(\Theta, r) = \text{dist}(\text{polo}, \text{retta di applicazione})$



oss:  $\vec{M}_\Theta = (\overline{\Theta H} + \overline{HP}) \wedge \vec{F} = \overline{\Theta H} \wedge \vec{F}$  con  $\overline{\Theta H} \perp \vec{F} \Rightarrow |\vec{M}_\Theta| = |\overline{\Theta H}| |\vec{F}| \sin(\pi/2) = b |\vec{F}|$

Def: Un sistema di forze è una famiglia  $\mathcal{F} = \{(P_i, \vec{F}_i)\}_{i=1, \dots, N} \subset \mathcal{E}^3 \times \mathbb{R}^3$ . Inoltre:

- la risultante di  $\mathcal{F}$  è  $\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \in \mathbb{R}^3$  (vettore libero)
- il momento risultante di  $\mathcal{F}$  rispetto al polo fisso  $\Theta$  è  $\vec{M}_\Theta = \sum_{i=1}^N \overline{\Theta P_i} \wedge \vec{F}_i = \sum_i$  (momenti di singola forza)
- $\mathcal{F}$  è un sistema piano se  $\exists$  piano  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  t.c.  $P_i \in \pi, \vec{F}_i \parallel \pi \forall i=1, \dots, n$

oss:  $\mathcal{F}$  sistema piano  $\subset \pi$  con  $\pi \perp \hat{k} \Rightarrow \vec{R} \perp \hat{k}$  e  $\vec{M}_\Theta \parallel \hat{k}$  se  $\Theta \in \pi$ . (altrimenti non è detto)

Lemma (proprietà del trasporto) Sia  $\mathcal{F} = \{(P_i, \vec{F}_i)\}_{i=1, \dots, N}$  sist. di forze con risultante  $\vec{R}$ .

Allora i momenti risultanti  $\vec{M}_\Theta, \vec{M}_{\Theta'}$  rispetto a due poli  $\Theta, \Theta' \in \mathcal{E}^3$  soddisfano

$$\vec{M}_{\Theta'} = \vec{M}_\Theta + \vec{R} \wedge \overline{\Theta \Theta'}$$

oss:  $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{\Theta'} = \vec{M}_\Theta \forall \Theta, \Theta' \in \mathcal{E}^3 \Rightarrow$  momento risultante indipendente dal polo.

oss: analogia con teo Rivals con le sostituzioni  $\vec{M}_{\Theta'} \leftrightarrow \vec{v}_Q, \vec{M}_\Theta \leftrightarrow \vec{v}_P, \vec{R} \leftrightarrow \vec{\omega}, \overline{\Theta \Theta'} \leftrightarrow \overline{PQ}$

dim:  $\vec{M}_{\Theta'} = \sum_i \overline{\Theta' P_i} \wedge \vec{F}_i = \sum_i (\overline{\Theta \Theta'} + \overline{\Theta P_i}) \wedge \vec{F}_i = \overline{\Theta \Theta'} \wedge \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \overline{\Theta P_i} \wedge \vec{F}_i = \overline{\Theta \Theta'} \wedge \vec{R} + \vec{M}_\Theta$

Def: Una coppia di forze è un sistema con risultante nulla:  $\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}), (P_2, -\vec{F})\}$

Il braccio della coppia è la distanza  $b > 0$  tra le rette di applicazione delle forze.

oss:  $\vec{M}_\Theta = \overline{\Theta P_1} \wedge \vec{F} + \overline{\Theta P_2} \wedge (-\vec{F}) = (\overline{\Theta P_1} - \overline{\Theta P_2}) \wedge \vec{F} = \overline{P_2 P_1} \wedge \vec{F} \rightarrow$  momento risultante indep. da polo.

oss:  $\vec{M}_\Theta = \overline{\Theta P_2} \wedge \vec{F} = \overline{P_2 H} \wedge \vec{F} + \overline{HP_1} \wedge \vec{F}$

$\overline{P_2 H} \perp \vec{F}, \overline{HP_1} \parallel \vec{F} \Rightarrow |\vec{M}_\Theta| = |\overline{P_2 H}| |\vec{F}| \sin \frac{\pi}{2} = b |\vec{F}|$

Def: Due sistemi di forze  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$  sono detti equivalenti se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante:

$$\vec{R} = \vec{R}' \text{ e } \vec{M}_\Theta = \vec{M}'_\Theta \forall \Theta \in \mathcal{E}^3$$

oss: essere equivalenti è una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica, transitiva). Scriveremo  $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$  per indicare che  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}'$  sono sistemi equivalenti.

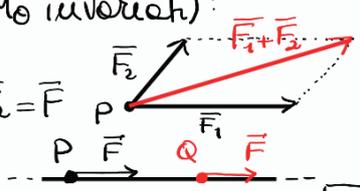
oss: la relazione di equivalenza non dipende dal polo  $\Theta \in \mathcal{E}^3$  usato per scrivere il momento risultante. Infatti:

$Q \neq \Theta \Rightarrow \vec{M}_Q - \vec{M}'_Q = (\overline{\Theta \Theta'} \wedge \vec{R}) - (\overline{\Theta \Theta'} \wedge \vec{R}') = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_Q = \vec{M}'_Q$

prop. trasporto       $\vec{M}_\Theta = \vec{M}'_\Theta$        $\vec{R} = \vec{R}'$

oss: proprietà invariantive elementari che portano da  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{F}' \sim \mathcal{F}$  ( $\vec{R}, \vec{M}_\Theta$  invarianti):

1. composizione  $(P, \vec{F}_1), (P, \vec{F}_2) \in \mathcal{F} \rightarrow (P, \vec{F}_1 + \vec{F}_2) \in \mathcal{F}'$
2. decomposizione  $(P, \vec{F}) \in \mathcal{F} \rightarrow (P, \vec{F}_1), (P, \vec{F}_2) \in \mathcal{F}'$  con  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$
3. scorrimento  $(P, \vec{F}) \in \mathcal{F} \rightarrow (Q, \vec{F}) \in \mathcal{F}'$  con  $\overline{QP} \parallel \vec{F}$



NB: 1 e 2 lasciano invariato la fisica del sistema

3 lascia invariato la fisica solo nel caso di corpo rigido:



Def: L'invariante scalare associato ad un sistema di forze  $\mathcal{F}$  con risultanti  $\bar{R}, \bar{M}_O$  è

$$I = \bar{R} \cdot \bar{M}_O$$

Lemma: L'invariante scalare  $I$  non dipende dal polo  $O \in E^3$  associato al momento risultante

$$\text{dim: } O' \neq O \in E^3 \Rightarrow I' \equiv \bar{R} \cdot \bar{M}_{O'} = \bar{R} \cdot (\bar{M}_O + \bar{O}' \bar{O} \wedge \bar{R}) = \bar{R} \cdot \bar{M}_O + \bar{R} \cdot (\bar{O}' \bar{O} \wedge \bar{R}) = I$$

prop. trasporto  $\bar{O}' \bar{O} \wedge \bar{R} \perp \bar{R}$  □

Teorema di riduzione: Ogni sistema di forze  $\mathcal{F}$  è equivalente ad un sistema  $\mathcal{F}'$  formato al più da una forza e da una coppia di forze. Si ha la classificazione seguente in funzione delle risultanti  $\bar{R}, \bar{M}_O$  di  $\mathcal{F}$  e dell'invariante scalare associato  $I = \bar{R} \cdot \bar{M}_O$ :

- 1)  $(I=0), \bar{R}=\bar{0}, \bar{M}_O=\bar{0} \Rightarrow \mathcal{F} \sim \mathcal{F}' = \{(O, \bar{0})\} \sim \emptyset$  (sistema nullo o equilibrato)
- 2)  $(I=0), \bar{R}=\bar{0}, \bar{M}_O \neq \bar{0} \Rightarrow \mathcal{F} \sim \mathcal{F}' = \{(P_1, \bar{F}), (P_2, -\bar{F})\}$  con  $\bar{P}_2 \bar{P}_1 \wedge \bar{F} = \bar{M}_O$
- 3)  $I=0, \bar{R} \neq \bar{0}, (\bar{M}_O \perp \bar{R}) \Rightarrow \mathcal{F} \sim \mathcal{F}' = \{(H, \bar{R})\}$
- 4)  $I \neq 0 (\bar{R} \neq \bar{0}, \bar{M}_O \neq \bar{0}) \Rightarrow \mathcal{F} \sim \mathcal{F}' = \{(O, \bar{R}), (P_1, \bar{F}), (P_2, -\bar{F})\}$  con  $\bar{P}_2 \bar{P}_1 \wedge \bar{F} = \bar{M}_O$

Inoltre, se  $\bar{R} \neq \bar{0}$  allora  $\exists!$   $h =$  asse centrale (asse di applicazione della risultante se  $I=0$ )  
 t.c.  $h \parallel \bar{R} \parallel \bar{M}_H \forall H \in h$ , parametrizzato come segue per  $O \in E^3$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\overline{OH}_\lambda = \lambda \bar{R} + \frac{\bar{R} \wedge \bar{M}_O}{|\bar{R}|^2} \quad \forall H \in h \quad \left[ \begin{array}{l} \text{parametrizzazione affine della} \\ \text{retta } \parallel \bar{R}, \text{ passante per } \bar{R} \wedge \bar{M}_O / |\bar{R}|^2 \end{array} \right]$$

Di tutti i poli, quelli sull'asse centrale minimizzano il momento risultante

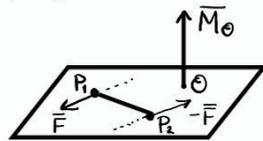
$$\bar{M}_H = \frac{I}{|\bar{R}|} \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} \quad \forall H \in h.$$

OSS: Chiara analogia col teorema di Mozzi tramite le sostituzioni  $\bar{\omega} \leftrightarrow \bar{R}, \bar{v}_P \leftrightarrow \bar{M}_O$

OSS:  $I=0 \Rightarrow \bar{M}_H = \bar{0} \quad \forall H \in h.$

OSS: In (3) si sceglie  $H \in h$

In (2)(4), siccome  $\bar{P}_2 \bar{P}_1 \wedge \bar{F} = \bar{M}_O \neq \bar{0}$ , si ha  $\bar{F} \perp \bar{M}_O \Rightarrow$  coppia di forze  $\perp \bar{M}_O$



dim: 0) Dato  $\mathcal{F} = \{(P_i, \bar{F}_i)\}_{i=1, \dots, N}$  con risultanti  $\bar{R}, \bar{M}_O$  e invariante  $I$ , possiamo

$\mathcal{F}' := \{(O, \bar{R}), (P_1, \bar{F}), (P_2, -\bar{F})\}$  con  $P_1, P_2 \in E^3, \bar{F} \in \mathbb{R}^3$  da determinare

$$\bar{R}' = \bar{R} + \bar{F} + (-\bar{F}) = \bar{R}$$

$$\bar{M}'_O = \bar{O} \bar{O} \wedge \bar{R} + \bar{O} \bar{P}_1 \wedge \bar{F} + \bar{O} \bar{P}_2 \wedge (-\bar{F}) = \bar{P}_2 \bar{P}_1 \wedge \bar{F}$$

$\hookrightarrow$  Si possono sempre scegliere  $P_1, P_2, \bar{F}$  t.c.  $\bar{P}_2 \bar{P}_1 \wedge \bar{F} = \bar{M}_O$  (scelta non unica)

$\Rightarrow \mathcal{F}' \sim \mathcal{F}$

1) Ovvio che  $\bar{R} = \bar{0}, \bar{M}_O = \bar{0} (I=0) \Leftrightarrow \mathcal{F} \sim \emptyset$

2)  $\bar{R}' = \bar{F} + (-\bar{F}) = \bar{0} = \bar{R} \checkmark, \quad \bar{M}'_O = \bar{O} \bar{P}_1 \wedge \bar{F} + \bar{O} \bar{P}_2 \wedge (-\bar{F}) = \bar{P}_2 \bar{P}_1 \wedge \bar{F} \stackrel{!}{=} \bar{M}_O \quad \bar{x} \wedge \bar{a} = \bar{b}$   
 Possiamo fissare arbitrariamente  $\bar{P}_2 \in E^3$  e cercare  $P_1 \in E^3, \bar{F} \in \mathbb{R}^3$  t.c.  $\bar{P}_2 \bar{P}_1 \wedge \bar{F} = \bar{M}_O$

Lemma Mozzi:  $\exists$  soluzioni se e solo se  $\bar{F} \perp \bar{M}_O \Rightarrow \bar{F} \neq \bar{0}$  è piano  $\perp \bar{M}_O$

Fissato arbitrariamente  $\bar{F}$  come sopra  $\Rightarrow \exists!$  rette soluz:  $\bar{P}_2 \bar{P}_\lambda = \lambda \bar{F} + \frac{\bar{F} \wedge \bar{M}_O}{|\bar{F}|^2}, \lambda \in \mathbb{R}$

Si sceglie  $P_1 \in r$  arbitrariamente.

(3 gdl) + (2 gdl) + (1 gdl)  $\Rightarrow \infty^6$  possibili scelte della coppia  $\{(P_1, \bar{F}), (P_2, -\bar{F})\}$

3) Proprietà del trasporto  $\Rightarrow \bar{M}_H = \bar{M}_O + \bar{R} \wedge \bar{O}H \Leftrightarrow \overline{OH} \wedge \bar{R} = \bar{M}_O - \bar{M}_H \quad (\bar{R} \neq \bar{0})$

Tenendo conto che  $\bar{R} \neq \bar{0}$ , poniamo  $\bar{n}_R := \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|}$  e consideriamo la decomposizione

$$\bar{M}_H = \underbrace{\bar{M}_H - (\bar{M}_H \cdot \bar{n}_R) \bar{n}_R}_{\bar{M}_{H,\perp}} + \underbrace{(\bar{M}_H \cdot \bar{n}_R) \bar{n}_R}_{\bar{M}_{H,\parallel}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \bar{M}_{H,\perp} \cdot \bar{n}_\omega = 0 \leftrightarrow \bar{M}_{H,\perp} \perp \bar{n}_\omega \\ \bar{M}_{H,\parallel} \wedge \bar{n}_\omega = \bar{0} \leftrightarrow \bar{M}_{H,\parallel} \parallel \bar{n}_\omega \end{cases}$$

$$\bar{M}_{H,\parallel} = \frac{\bar{M}_H \cdot \bar{R}}{|\bar{R}|} \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{\mathbf{I}}{|\bar{R}|} \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} \quad \forall H \in \mathcal{E}^3 \rightarrow \text{indipendente dal polo } H$$

$$\Rightarrow \bar{M}_{H,\parallel} = \bar{M}_{\bar{0},\parallel}$$

Sia  $\mathfrak{h} = \{H \in \mathcal{E}^3 \mid \bar{M}_{H,\perp} = \bar{0}\}$ . Allora, per ogni  $H \in \mathfrak{h}$  si ha

$$\begin{cases} \bar{\Theta}H \wedge \bar{R} = \bar{M}_{\bar{0}} - \bar{M}_H = (\bar{M}_{\bar{0},\parallel} + \bar{M}_{\bar{0},\perp}) - (\bar{M}_{H,\parallel} + \bar{M}_{H,\perp}) = \bar{M}_{\bar{0},\perp} \\ \text{con } \bar{R} \cdot \bar{M}_{\bar{0},\perp} = 0 \text{ per costruzione + Lemma Mozzi} \end{cases} \Rightarrow \bar{\Theta}H_\lambda = \lambda \bar{R} + \frac{\bar{R} \wedge (\bar{M}_{\bar{0},\perp} + \bar{M}'_{\bar{0},\parallel})}{|\bar{R}|^2}$$

$$= \lambda \bar{R} + \frac{\bar{R} \wedge \bar{M}_{\bar{0}}}{|\bar{R}|^2}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Usando ancora la proprietà del trasporto, si ottiene

$$\bar{M}_H = \bar{M}_{\bar{0}} + \bar{R} \wedge \bar{\Theta}H = \bar{M}_{\bar{0}} + \bar{R} \wedge \left[ \lambda \bar{R} + \frac{\bar{R} \wedge \bar{M}_{\bar{0}}}{|\bar{R}|^2} \right] = \bar{M}_{\bar{0}} + \frac{1}{|\bar{R}|^2} \left[ (\bar{R} \cdot \bar{M}_{\bar{0}}) \bar{R} - (\bar{R} \wedge \bar{R}) \bar{M}_{\bar{0}} \right] = \frac{\mathbf{I}}{|\bar{R}|} \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|}$$

Per ogni  $H \in \mathfrak{h}$  ed ogni altro polo  $\Theta \in \mathcal{E}^3$  si ha

$$|\bar{M}_{\bar{0}}|^2 = |\bar{M}_{\bar{0},\perp}|^2 + |\bar{M}_{\bar{0},\parallel}|^2 \geq |\bar{M}_{\bar{0},\parallel}|^2 = |\bar{M}_{H,\parallel}|^2 = |\bar{M}_H|^2 \Rightarrow |\bar{M}_{\bar{0}}| \geq |\bar{M}_H|$$

Inoltre, se  $\mathbf{I} = 0$  si ha  $\bar{M}_H = \bar{0} \quad \forall H \in \mathfrak{h} \Rightarrow \mathfrak{H} \sim \mathfrak{H}' = \{(H, \bar{R})\}$  con  $H \in \mathfrak{h}$ .  
In particolare, ci sono  $\omega^\perp$  possibili scelte di  $H \in \mathfrak{h}$ .

4)  $\bar{R}' = \bar{R} + \bar{F} + (-\bar{F}) = \bar{R} \quad \checkmark, \quad \bar{M}'_{\bar{0}} = \bar{\Theta}P_1 \wedge \bar{R} + \bar{\Theta}P_1 \wedge \bar{F} + \bar{\Theta}P_2 \wedge (-\bar{F}) = \bar{P}_2 P_1 \wedge \bar{F} = \bar{M}_{\bar{0}}$   
 $\hookrightarrow$  Dimostrazione analoga a quella dei punti (2) e (3).

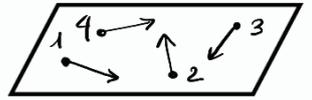
Esempio: Sistema di forze piane  $\mathfrak{H} \Leftrightarrow \exists$  piano  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  t.c.  $P_i \in \pi, \bar{F}_i \parallel \pi \quad \forall i = 1, \dots, N$

$$\Leftrightarrow \exists \hat{k} \in \mathbb{R}^3 \text{ vettore t.c. } \hat{k} \perp \pi, \bar{P}_i P_j \cdot \hat{k} = 0, \bar{F}_i \cdot \hat{k} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$$

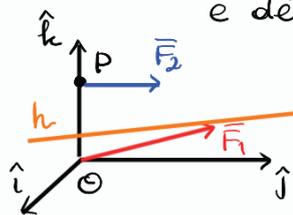
$$\Rightarrow \bar{R} \cdot \hat{k} = (\sum_i \bar{F}_i) \cdot \hat{k} = \sum_i (\bar{F}_i \cdot \hat{k}) = 0 \Rightarrow \bar{R} \perp \hat{k} \Leftrightarrow \bar{R} \parallel \pi$$

$$\bar{M}_{P_1} \wedge \hat{k} = (\sum_i \bar{P}_i P_1 \wedge \bar{F}_i) \wedge \hat{k} = \sum_i [(\bar{P}_i P_1 \cdot \hat{k}) \bar{F}_i - (\bar{F}_i \cdot \hat{k}) \bar{P}_i P_1] = \bar{0} \Rightarrow \bar{M}_{P_1} \parallel \hat{k} \Leftrightarrow \bar{M}_{P_1} \perp \pi$$

$$\Rightarrow \bar{R} \perp \bar{M}_{P_1} \Rightarrow \mathbf{I} = \bar{R} \cdot \bar{M}_{P_1} = 0 \Rightarrow \mathfrak{H} \text{ appartiene ad una delle classi } 1, 2, 3 \text{ descritte nel teorema precedente.}$$



Esercizio: Classificare il sistema  $\mathfrak{H} = \{(O, \bar{F}_1), (P, \bar{F}_2)\}$  con  $\bar{\Theta}P = 2\hat{k}, \bar{F}_1 = -\hat{i} + 3\hat{j}, \bar{F}_2 = 2\hat{j}$  e determinare l'ome centrale associato.



$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = -\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{j} = -\hat{i} + 5\hat{j}$$

$$\bar{M}_{\bar{0}} = \bar{\Theta}O \wedge \bar{F}_1 + \bar{\Theta}P \wedge \bar{F}_2 = 2\hat{k} \wedge 2\hat{j} = -4\hat{i}$$

$$\bar{\Theta}H_\lambda = \lambda \bar{R} + \frac{\bar{R} \wedge \bar{M}_{\bar{0}}}{|\bar{R}|^2} = \lambda(-\hat{i} + 5\hat{j}) + \frac{1}{26} [(-\hat{i} + 5\hat{j}) \wedge (-4\hat{i})] = -\lambda\hat{i} + 5\lambda\hat{j} + \frac{10}{13}\hat{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{I} = \bar{R} \cdot \bar{M}_{\bar{0}} = (-\hat{i} + 5\hat{j}) \cdot (-4\hat{i}) = 4 \neq 0$$

$\hookrightarrow$  tipologia 4

Esercizio: Classificare il sistema  $\mathfrak{H} = \{(P_1, \bar{F}_1), (P_2, \bar{F}_2), (P_3, \bar{F}_3)\}$  con  $\bar{\Theta}P_1 = -\hat{i} + 2\hat{k}, \bar{\Theta}P_2 = \hat{i}, \bar{\Theta}P_3 = \hat{i} + \hat{j}$   
 $\bar{F}_1 = \hat{i} - \hat{k}, \bar{F}_2 = \hat{i} + 2\hat{j}, \bar{F}_3 = \hat{j}$

Determinare l'ome centrale associato

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$

$$\bar{M}_{\bar{0}} = \bar{\Theta}P_1 \wedge \bar{F}_1 + \bar{\Theta}P_2 \wedge \bar{F}_2 + \bar{\Theta}P_3 \wedge \bar{F}_3 = (-\hat{i} + 2\hat{k}) \wedge (\hat{i} - \hat{k}) + \hat{i} \wedge (\hat{i} + 2\hat{j}) + (\hat{i} + \hat{j}) \wedge \hat{j}$$

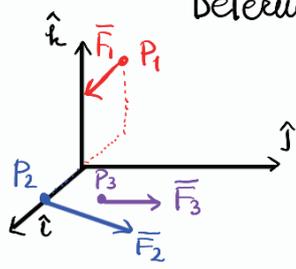
$$= -\hat{j} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \hat{k} = \hat{j} + 3\hat{k} \neq \bar{0}$$

tipologia 3

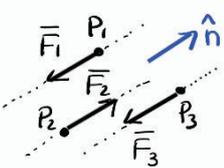
$$\mathbf{I} = \bar{R} \cdot \bar{M}_{\bar{0}} = 3 - 3 = 0$$

$$\bar{\Theta}H_\lambda = \lambda \bar{R} + \frac{\bar{R} \wedge \bar{M}_{\bar{0}}}{|\bar{R}|^2} = \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + \frac{1}{14} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + \frac{1}{14} [10\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}]$$

$$= \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + \left( \frac{5}{7}\hat{i} - \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{1}{7}\hat{k} \right)$$



Def: Una famiglia  $\mathcal{F} = \{(P_i, \vec{F}_i)\}_{i=1, \dots, N}$  è detta sistema di forze parallele se  $\exists$  vettore direzionale  $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$  t.c.  $\vec{F}_i \parallel \hat{n} \quad \forall i=1, \dots, N$ .



Oss:  $\mathcal{F}$  sist. forze parallele  $\Leftrightarrow \exists f_i \in \mathbb{R}$  scalari t.c.  $\vec{F}_i = f_i \hat{n}$  ( $f_i = \vec{F}_i \cdot \hat{n}$ )  $\forall i=1, \dots, N$

Lemma:  $\mathcal{F}$  sist. forze parallele con direzione  $\hat{n}$  e risultanti  $\vec{R}, \vec{M}_\theta \Rightarrow \vec{R} \parallel \hat{n}$  e  $\vec{M}_\theta \perp \hat{n}$

dim:  $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i (f_i \hat{n}) = (\sum_i f_i) \hat{n} \Rightarrow \vec{R} \parallel \hat{n} = \vec{0}$  e  $|\vec{R}| = |\sum_i f_i|$   
 $\vec{M}_\theta = \sum_i \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i \vec{OP}_i \wedge (f_i \hat{n}) = (\sum_i f_i \vec{OP}_i) \wedge \hat{n} \Rightarrow \vec{M}_\theta \cdot \hat{n} = 0$  Esercizio:  $|\vec{M}_\theta| = ?$

Oss:  $\hat{n}$  è vettore direzionale per  $\mathcal{F} \Leftrightarrow -\hat{n}$  è vettore direzionale per  $\mathcal{F}$

$\hookrightarrow$  Si può scegliere  $\hat{n}/-\hat{n}$  in modo tale che  $\sum_i f_i \geq 0 \Rightarrow |\vec{R}| = \sum_i f_i \geq 0!$

Oss:  $\mathcal{F}$  sist. forze parallele  $\Rightarrow \mathcal{I} = \vec{R} \cdot \vec{M}_\theta = 0 \Rightarrow \mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$  generalmente di tipo 3 (tipo 1 o 2 in casi particolari con  $\vec{R} = \vec{0}$  e/o  $\vec{M}_\theta = \vec{0}$ )

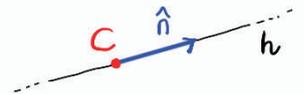
Se  $\vec{R} \neq \vec{0} \exists$  h = onne di applicazione della risultante parametrizzato come

$$\vec{OH} = \lambda \vec{R} + \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_\theta}{|\vec{R}|^2} = \lambda |\vec{R}| \hat{n} + \frac{1}{|\vec{R}|^2} [|\vec{R}| \hat{n} \wedge (\sum_i f_i \vec{OP}_i \wedge \hat{n})] = \lambda |\vec{R}| \hat{n} + \frac{1}{|\vec{R}|} [(\hat{n} \cdot \hat{n}) \sum_i f_i \vec{OP}_i - (\sum_i f_i \vec{OP}_i \cdot \hat{n}) \hat{n}]$$

$$= [\lambda |\vec{R}| - \sum_i f_i \vec{OP}_i \cdot \hat{n}] \hat{n} + \frac{1}{|\vec{R}|} \sum_i f_i \vec{OP}_i$$

Def: Il centro delle forze di un sist. di forze parallele  $\mathcal{F}$  con direzione  $\hat{n}$  e risultanti  $\vec{R}, \vec{M}_\theta$  è

$$C \in \mathcal{E}^3 \text{ t.c. } \vec{OC} = \frac{1}{|\vec{R}|} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i \cdot \hat{n}) \vec{OP}_i$$



Oss:  $\vec{OC} = \vec{OH}_{\lambda_*}$  con  $\lambda_* = \frac{1}{|\vec{R}|} \sum_i f_i (\vec{OP}_i \cdot \hat{n}) \Rightarrow C \in h =$  onne applicazione risultante  $\parallel \vec{R} \parallel \hat{n}$ .

Oss: C non dipende dalla direzione delle forze, ma solo dai loro versi e dai loro moduli.

Lemma: Il centro delle forze C non dipende dal polo  $\theta \in \mathcal{E}^3$  usato per scrivere  $\vec{M}_\theta$

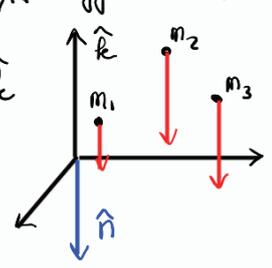
dim: Per assurdo, siano  $C \neq C'$  i centri associati a due poli distinti  $\theta \neq \theta'$ . Allora

$$\vec{\theta' C'} = \frac{1}{|\vec{R}|} \sum_i f_i \vec{\theta' P}_i = \frac{1}{|\vec{R}|} \sum_i f_i (\vec{\theta \theta} + \vec{\theta P}_i) = \frac{1}{|\vec{R}|} (\sum_i f_i) \vec{\theta \theta} + \frac{1}{|\vec{R}|} \sum_i f_i \vec{OP}_i = \vec{\theta \theta} + \vec{OC} = \vec{\theta' C} \Rightarrow C = C' \quad \square$$

Esempio: Forza peso

Si consideri un sistema di punti materiali  $\{P_i\}_{i=1, \dots, N}$  con masse  $\{m_i\}_{i=1, \dots, N}$  soggetto ad un campo gravitazionale, nell'approssimazione di campo uniforme.

$\mathcal{F} = \{(P_i, \vec{F}_i = -m_i g \hat{k})\}_{i=1, \dots, N}$  = sist. di forze parallele con direzione  $\hat{n} = -\hat{k}$



$\Rightarrow \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = -(\sum_i m_i) g \hat{k} = M g \hat{n}$  con  $M = \sum_i m_i =$  massa totale

$\Rightarrow \vec{OC} = \frac{1}{|\vec{R}|} \sum_i (\vec{F}_i \cdot \hat{n}) \vec{OP}_i = \frac{1}{M g} \sum_i (-m_i g \hat{k}) \cdot (-\hat{k}) \vec{OP}_i = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{OP}_i$

$\hookrightarrow C =$  centro delle forze = baricentro

$\Rightarrow \mathcal{F} \sim \mathcal{F}' = \{(C, \vec{R})\}$ : sist. di forze equiv. a forza peso totale applicata nel baricentro.

Def: Il centro di massa (cdm) di un sistema di punti materiali  $\{P_i\}_{i=1, \dots, N}$  con masse  $\{m_i\}_{i=1, \dots, N}$  è

$$G \in \mathcal{E}^3 \text{ t.c. } \vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{OP}_i \quad \text{con } M = \sum_i m_i$$

Oss:  $\vec{OG} =$  media delle posizioni dei punti pesata con le masse.

Oss: Nel caso di un sistema materiale continuo con densità di massa  $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ , si generalizza il concetto fissando un sist. di rif.  $(\theta; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  e ponendo

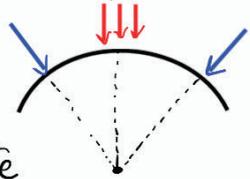
$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}) \vec{x} d^3 \vec{x} \quad \text{con } M = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}) d^3 \vec{x}$$

NB: da intendersi componente per componente

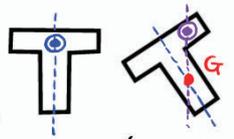
$$x_G = \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x,y,z) x \, dx \, dy \, dz \quad y_G = \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x,y,z) y \, dx \, dy \, dz \quad z_G = \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x,y,z) z \, dx \, dy \, dz$$

OSS: baricentro e centro di massa sono concetti distinti

↳ I due punti coincidono perché si approssima la forza gravitazionale con sist. forze parallele  
 ⇒ l'identità subordinata ad approssimazione valida solo per sistemi di dimensioni piccole rispetto alle loro distanze dal centro di attrazione gravitazionale



Il baricentro fisico di un corpo esteso può essere determinato empiricamente "appendendo" il corpo tramite cerniere in punti distinti (corpo libero di ruotare) e determinando l'intersezione delle direzioni identificate da un filo a piombo passate per la cerniera



↳ Il baricentro fisico si posiziona sempre sotto al punto di sospensione

Proposizione (proprietà distributiva del CM): Sia  $S = \{(P_i, m_i)\}_{i=1, \dots, N}$  un sistema di pt. materiali e siano  $S_1, S_2$  due sottoinsiemi di  $S$  t.c.  $S = S_1 \cup S_2$  e  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . Sia  $G, G_1, G_2$  i cm e siano  $M, M_1, M_2$  le masse totali di  $S, S_1, S_2$  rispettivamente. Allora

$$\vec{OG} = \frac{M_1}{M} \vec{OG}_1 + \frac{M_2}{M} \vec{OG}_2 \quad \text{con } M = M_1 + M_2$$

dim: A meno di riordinare gli indici si può sempre assumere che  $\exists k \in \{1, \dots, N\}$  t.c.

$$S_1 = \{(P_i, m_i)\}_{i=1, \dots, k} \quad S_2 = \{(P_i, m_i)\}_{i=k+1, \dots, N}$$

$$\Rightarrow \vec{OG}_1 = \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^k m_i \vec{OP}_i \quad \text{con } M_1 = \sum_{i=1}^k m_i; \quad \vec{OG}_2 = \frac{1}{M_2} \sum_{i=k+1}^N m_i \vec{OP}_i \quad \text{con } M_2 = \sum_{i=k+1}^N m_i$$

$$\Rightarrow M = \sum_{i=1}^N m_i = \left( \sum_{i=1}^k m_i \right) + \left( \sum_{i=k+1}^N m_i \right) = M_1 + M_2$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{OP}_i = \frac{M_1}{M} \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^k m_i \vec{OP}_i + \frac{M_2}{M} \frac{1}{M_2} \sum_{i=k+1}^N m_i \vec{OP}_i = \frac{M_1}{M} \vec{OG}_1 + \frac{M_2}{M} \vec{OG}_2 \quad \square$$

OSS: con un argomento ricorsivo si deduce un risultato analogo per qualsiasi partizione del sistema  $S$  in sottoinsiemi disgiunti  $\{S_{\ell}\}_{\ell=1, \dots, L}$  t.c.

$$S = \bigcup_{\ell=1}^L S_{\ell}, \quad S_{\ell} \cap S_{\ell'} = \emptyset \text{ se } \ell \neq \ell'$$

Indicando con  $G_1, \dots, G_L$  i cm e con  $M_1, \dots, M_L$  le masse totali dei sottosistemi, si ha

$$\vec{OG} = \sum_{\ell=1}^L \frac{M_{\ell}}{M} \vec{OG}_{\ell} \quad \text{con } M = \sum_{\ell=1}^L M_{\ell}$$

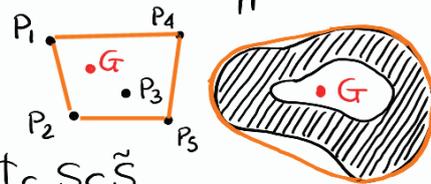


OSS: Vale un risultato analogo per sistemi materiali continui.

Proposizione (convessità): Il baricentro  $G$  di un sistema  $S$  appartiene all'involucro convesso

$\tilde{S}$  del sistema stesso:  $G \in \tilde{S}$

OSS:  $S$  convesso  $\Leftrightarrow \forall P_1, P_2 \in S$ , il segmento congiungente  $P_1 P_2$  è a sua volta contenuto in  $S$



$\tilde{S}$  = involucro convesso di  $S \Leftrightarrow \tilde{S}$  = più piccolo insieme convesso t.c.  $S \subset \tilde{S}$

$\Leftrightarrow \tilde{S} = \bigcap \{ \text{insiemi convessi contenenti } S \}$

OSS: risultato valido sia per sistemi discreti che per sistemi continui

NB: sistemi discreti non sono mai convessi;  
 sistemi continui possono essere convessi.



OSS:  $S$  sistema (continuo) convesso  $\Rightarrow S = \tilde{S} \Rightarrow G \in S$

In generale  $S \subsetneq \tilde{S}$  (inclusione stretta)  $\Rightarrow S \neq \tilde{S} \begin{cases} G \in S & \text{entrambi} \\ G \notin S & \text{possibili.} \end{cases}$

Esempi: 1)  $S = \{(P_1, m_1), (P_2, m_2)\} = 2$  pt. materiali  $\Rightarrow G \in$  segmento congiungente  $P_1, P_2$

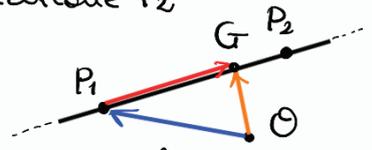
$$\overline{OG} = \frac{1}{m_1+m_2} [m_1 \overline{OP_1} + m_2 \overline{OP_2}] = \frac{1}{m_1+m_2} [m_1 \overline{OP_1} + m_2 (\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2})] = \overline{OP_1} + \frac{m_2}{m_1+m_2} \overline{P_1P_2}$$

= punto appartenente alla retta passante per  $P_1$  diretta come  $\overline{P_1P_2}$   
 rivolto e distanze  $\frac{m_2}{m_1+m_2} |P_1P_2| \leq |P_1P_2|$  da  $P_1$  in direzione  $P_2$

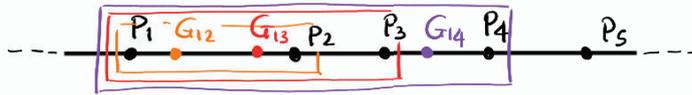
OSS:  $m_1 \neq 0, m_2 = 0 \Rightarrow \overline{OG} = \overline{OP_1} \Rightarrow G = P_1$

$m_1 = 0, m_2 \neq 0 \Rightarrow \overline{OG} = \overline{OP_2} \Rightarrow G = P_2$

$m_1 = m_2 \neq 0 \Rightarrow \overline{OG} = \overline{OP_1} + \frac{1}{2} \overline{P_1P_2} \Rightarrow G =$  punto medio



OSS: Iterando e usando la proprietà distributiva si deduce che il cdm di un sistema di punti allineati giace sulla stessa retta dei punti ed è interno

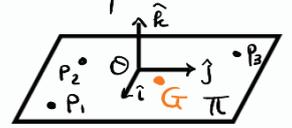


2)  $S =$  sistema piano di pt. materiali  $\Rightarrow G \in$  piano che contiene i punti

dim:  $S$  piano  $\Rightarrow \exists$  piano  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  t.c.  $P_i \in \pi \forall i = 1, \dots, N$

$\hookrightarrow$  Scegliamo sist. di rif.  $(O, \{i, j, \hat{k}\})$  t.c.  $O \in \pi, \hat{k} \perp \pi$

$$\Rightarrow \overline{OP_i} \cdot \hat{k} = 0 \forall i \Rightarrow \overline{OG} \cdot \hat{k} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \overline{OP_i} \cdot \hat{k} = 0 \Rightarrow \overline{OG} \perp \hat{k} \Rightarrow G \in \pi$$

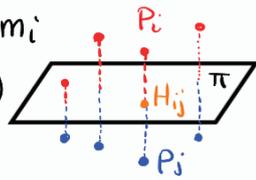


Def: Dato un sistema di punti materiali  $S = \{(P_i, m_i)\}_{i=1, \dots, N}$ , un piano  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  è detto piano di simmetria materiale per  $S$  se

$\forall P_i \in S \cap \pi \exists P_j \in S$  simmetrico di  $P_i$  rispetto a  $\pi$  t.c.  $m_j = m_i$

OSS:  $P_j$  simmetrico di  $P_i$  rispetto a  $\pi \Leftrightarrow \overline{P_iP_j} \perp \pi$  e  $\text{dist}(P_i, \pi) = \text{dist}(P_j, \pi)$

$\Leftrightarrow \exists H_{ij} =$  pt. medio di  $\overline{P_iP_j}$  t.c.  $H_{ij} \in \pi$  e  $\overline{H_{ij}P_j} = -\overline{H_{ij}P_i}$



OSS: Nel caso di un sistema continuo  $S$  con densità di massa  $\rho$ ,  $\pi$  è un piano di simmetria materiale se, detta  $R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la riflessione corrispondente si ha

$$R\bar{x} \in S \text{ e } \rho(R\bar{x}) = \rho(\bar{x}) \forall \bar{x} \in S.$$

Proposizione (Simmetrie e cdm): Se un sistema materiale  $S$  con cdm  $G$  possiede un piano di simmetria  $\pi$ , allora  $G \in \pi$ . Se  $\pi_1, \dots, \pi_L$  sono piani di simmetria, allora

$$G \in \bigcap_{\ell=1}^L \pi_\ell$$

dim: Consideriamo un sistema discreto  $S = \{(P_i, m_i)\}_{i=1, \dots, N}$  con piano di simmetria  $\pi$ .

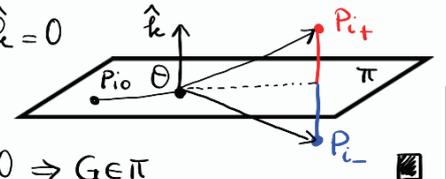
Fissiamo un sist. di rif.  $(O, \{i, j, \hat{k}\})$  t.c.  $O \in \pi, \hat{k} \perp \pi$  e consideriamo

$I_+ = \{i = 1, \dots, N \mid \overline{OP_i} \cdot \hat{k} \geq 0\}, I_- = \{i = 1, \dots, N \mid \overline{OP_i} \cdot \hat{k} < 0\}, I_0 = \{i = 1, \dots, N \mid \overline{OP_i} \cdot \hat{k} = 0\}.$

$\Rightarrow \forall i \in I_+ \exists! i_- \in I_-$  t.c.  $m_{i_+} = m_{i_-}$  e  $(\overline{OP_{i_+}} + \overline{OP_{i_-}}) \cdot \hat{k} = 0$

$$\Rightarrow \overline{OG} \cdot \hat{k} = \frac{1}{M} \left[ \sum_{i \in I_+} m_{i_+} \overline{OP_{i_+}} + \sum_{i \in I_-} m_{i_-} \overline{OP_{i_-}} + \sum_{i_0 \in I_0} m_{i_0} \overline{OP_{i_0}} \right] \cdot \hat{k}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i_+ \in I_+} m_{i_+} (\overline{OP_{i_+}} + \overline{OP_{i_-}}) \cdot \hat{k} + \frac{1}{M} \sum_{i_0 \in I_0} m_{i_0} \overline{OP_{i_0}} \cdot \hat{k} = 0 \Rightarrow G \in \pi$$



Esempi: 1)  $S = \{(P_1, m), (P_2, m)\} = 2$  pt. con masse uguali

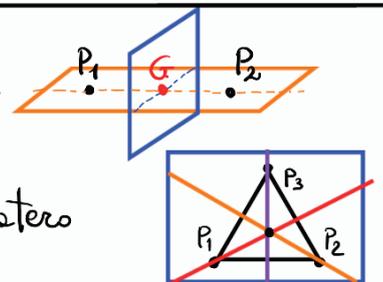
$\pi_0 =$  piano  $\perp P_1P_2$ , passante per il punto medio di  $P_1P_2$

$\pi =$  piano contenente  $P_1P_2 \rightarrow$  infiniti

$\Rightarrow G =$  pt. medio  $P_1P_2$

2)  $S = \{(P_1, m), (P_2, m), (P_3, m)\}$  con  $P_1, P_2, P_3$  triangolo equilatero

$\pi_0 =$  piano contenente  $P_1, P_2, P_3$

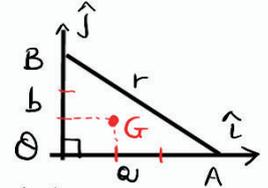


$\pi_1 = \text{piano } \perp \pi_0, \text{ passante per } P_1, \text{ equidistante da } P_2 \text{ e } P_3$   
 $\pi_2 = \text{ " " , " " } P_2, \text{ " " } P_3 \text{ e } P_1 \Rightarrow G = \text{intersezione altezze}$   
 $\pi_3 = \text{ " " , " " } P_3, \text{ " " } P_1 \text{ e } P_2$   
 OSS:  $m_1 = m_2 = m_3$  fondamentale per individuare  $G$  tramite simmetrie  
 OSS: Triangolo è convesso  $\Rightarrow G \in$  triangolo.

**Esercizio: determinare  $G$  per un triangolo scaleno**

3)  $S =$  lamina omogenea a forma di triangolo rettangolo  $\hat{O}AB$ , con cateti  $a, b$  e densità lineare  $\rho$ .

Scegliamo  $(\theta, \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\})$  t.c.  $\theta =$  vertice angolo retto  
 $\hat{i} \parallel \overline{OA}, \hat{j} \parallel \overline{OB}, \hat{k} \perp \hat{O}AB$



$\Rightarrow r =$  retta  $AB: y = b - \frac{b}{a}x$

$M = \int_{\hat{O}AB} \rho dx dy = \rho \cdot \text{Area}(\hat{O}AB) = \frac{1}{2} \rho ab$        $\overline{OG} = \frac{1}{M} \int_{\hat{O}AB} \rho \bar{x} dx dy$

$x_G = \frac{1}{M} \int_{\hat{O}AB} \rho x dx dy = \frac{\rho}{M} \int_0^a dx \int_0^{b-\frac{b}{a}x} dy = \frac{\rho}{M} \int_0^a dx x (b - \frac{b}{a}x) = \frac{\rho}{M} [b \frac{x^2}{2} - \frac{b}{a} \frac{x^3}{3}]_0^a = \frac{2}{ab} [ \frac{1}{2} a^2 b - \frac{1}{3} a^2 b ] = \frac{a}{3}$

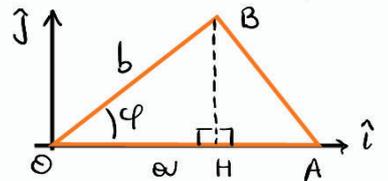
$y_G = \frac{1}{M} \int_{\hat{O}AB} \rho y dx dy = \frac{\rho}{M} \int_0^a dx \int_0^{b-\frac{b}{a}x} dy y = \frac{\rho}{M} \int_0^a dx \frac{1}{2} (b - \frac{b}{a}x)^2 = \frac{\rho}{2M} [b^2 x - \frac{2b^2}{a} \frac{x^2}{2} + \frac{b^2}{a^2} \frac{x^3}{3}]_0^a = \frac{b}{3}$

**Esercizio: determinare  $G$  con  $\rho = xy$  e  $\rho = x^2 + y^2$**

4)  $S =$  lamina omogenea a forma di triangolo scaleno  $\hat{O}AB$ , di lati  $|\overline{OA}| = a, |\overline{OB}| = b$ , angolo  $\varphi = \hat{A}OB \in [0, \pi/2)$  e densità  $\rho$ .

$(\theta, \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\})$  con  $\overline{OA} \parallel \hat{i}, \overline{OB} \parallel \hat{j}, \hat{k} \perp \hat{O}AB$

$\Rightarrow \overline{OA} = a \hat{i}, \overline{OB} = b \cos \varphi \hat{i} + b \sin \varphi \hat{j}, \overline{OH} = b \cos \varphi \hat{i}$



$M = \int_{\hat{O}AB} \rho dx dy = \rho \text{Area}(\hat{O}AB) = \frac{1}{2} \rho ab \sin \varphi$

Per determinare il cm uso la proprietà distributiva, separando  $\hat{O}AB$  nei triangoli rettangoli  $\hat{O}HB$  e  $HAB$

$\left. \begin{array}{l} \bullet \hat{O}HB: \rho = \text{cost.} \\ |\overline{HO}| = b \cos \varphi \\ |\overline{HB}| = b \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{OG}_1 = \overline{OH} + \overline{HG}_1 = b \cos \varphi \hat{i} + (-\frac{1}{3} |\overline{HO}| \hat{i} + \frac{1}{3} |\overline{HB}| \hat{j})$   
 $= \frac{2}{3} b \cos \varphi \hat{i} + \frac{1}{3} b \sin \varphi \hat{j}$

$M_1 = \rho \text{Area}(\hat{O}HB) = \frac{1}{2} \rho b^2 \cos \varphi \sin \varphi$

$\left. \begin{array}{l} \bullet \hat{H}AB: \rho = \text{cost.} \\ |\overline{HA}| = a - b \cos \varphi \\ |\overline{HB}| = b \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{OG}_2 = \overline{OH} + \overline{HG}_2 = b \cos \varphi \hat{i} + (\frac{1}{3} |\overline{HA}| \hat{i} + \frac{1}{3} |\overline{HB}| \hat{j})$   
 $= (\frac{a}{3} + \frac{2}{3} b \cos \varphi) \hat{i} + \frac{1}{3} b \sin \varphi \hat{j}$

$M_2 = \rho \text{Area}(\hat{H}AB) = \frac{1}{2} \rho (a - b \cos \varphi) b \sin \varphi$

$\Rightarrow \overline{OG} = \frac{M_1}{M} \overline{OG}_1 + \frac{M_2}{M} \overline{OG}_2 = \dots = \frac{1}{3} (a + b \cos \varphi) \hat{i} + \frac{1}{3} b \sin \varphi \hat{j}$

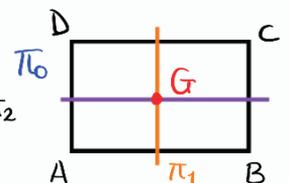
**Esercizio: • rifare senza usare proprietà distributiva  
• rifare con  $\varphi \in (\pi/2, \pi)$ .**

5)  $S =$  lamina omogenea rettangolare ABCD di lati  $|\overline{AB}| = a, |\overline{BC}| = b$ , densità  $\rho$

Metodo 1: piani di simmetria

$\pi_0 =$  piano in cui giace ABCD  
 $\pi_1 =$  piano  $\perp \pi_0$ , passante per pt. medi di AB e CD  
 $\pi_2 =$  " " , " " " " di BC e AD

$G = \pi_0 \cap \pi_1 \cap \pi_2$



Metodo 2: scomposizione in triangoli rettangoli + proprietà distributiva

$$\left. \begin{aligned} \triangle ABD: M_1 = \frac{1}{2} \rho ab, \overline{AG}_1 = \frac{a}{3} \hat{i} + \frac{b}{3} \hat{j} \\ \triangle BDC: M_2 = \frac{1}{2} \rho ab, \overline{CG}_2 = -\frac{a}{3} \hat{i} - \frac{b}{3} \hat{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{OG} = \frac{M_1}{M} \overline{OG}_1 + \frac{M_2}{M} \overline{OG}_2 = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{AG}_1) + \frac{1}{2} (\overline{OC} + \overline{CG}_2)$$

$$= \frac{1}{2} (\overline{OA} + \frac{a}{3} \hat{i} + \frac{b}{3} \hat{j}) + \frac{1}{2} (\overline{OA} + a \hat{i} + b \hat{j} - \frac{a}{3} \hat{i} - \frac{b}{3} \hat{j})$$

$$= \overline{OA} + \frac{a}{2} \hat{i} + \frac{b}{2} \hat{j}$$

Metodo 3: Calcolo diretto con definizione

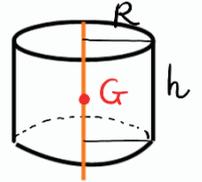
$$M = \int_{ABCD} \rho dx dy = \rho ab$$

$$x_G = \int_{ABCD} x \rho dx dy = \frac{1}{ab} \int_0^a x dx \int_0^b dy = \frac{1}{ab} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^a [y]_0^b = \frac{1}{2} a, \text{ analogamente } y_G = \frac{1}{2} b.$$

6)  $S =$  cilindro di raggio  $R$  e altezza  $h$  con densità radiale  $\rho(x,y) = \mu(x^2+y^2)$

Metodo 1: piani di simmetria

$\pi_1 =$  piano  $\perp$  asse del cilindro, a metà altezza }  $\Rightarrow G \in$  asse  
 $\pi =$  qualsiasi piano contenente asse del cilindro } equidistante delle basi



Metodo 2: calcolo diretto

$$M = \int_S \rho dx dy dz = \int_0^R dr r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \mu r^2 = \mu \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R [\varphi]_0^{2\pi} [z]_0^h = \frac{\pi}{2} \mu h R^4$$

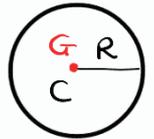
$$x_G = \frac{1}{M} \int_S x \rho dx dy dz = \frac{1}{M} \int_0^R dr r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \mu r^2 r \cos \varphi = \frac{\mu}{M} \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^R [\sin \varphi]_0^{2\pi} [z]_0^h = 0, \quad y_G = 0$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_S z \rho dx dy dz = \frac{1}{M} \int_0^R dr r \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \mu r^2 z = \frac{\mu}{M} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R [\varphi]_0^{2\pi} \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^h = \frac{2}{\pi h R^4} \frac{R^4}{4} 2\pi \frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}$$

7)  $S =$  sfera di raggio  $R$  con densità radiale  $\rho(x,y,z) = \rho(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

Metodo 1: piani di simmetria:

ogni piano passante per il centro della sfera  $\rightarrow G \equiv$  centro



Metodo 2: calcolo diretto.

$$M = \int_S \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} = \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(r) = \left( \int_0^R dr r^2 \rho(r) \right) [-\cos \theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi \int_0^R dr r^2 \rho(r)$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int_S \rho(\vec{x}) x d^3\vec{x} = \frac{1}{M} \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(r) r \sin \theta \cos \varphi = \frac{1}{M} \left( \int_0^R dr r^3 \rho(r) \right) \left( \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \right) \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \right) = 0$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_S \rho(\vec{x}) y d^3\vec{x} = \frac{1}{M} \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(r) r \sin \theta \sin \varphi = \frac{1}{M} \left( \int_0^R dr r^3 \rho(r) \right) \left( \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \right) \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi \right) = 0$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_S \rho(\vec{x}) z d^3\vec{x} = \frac{1}{M} \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(r) r \cos \theta = \frac{1}{M} \left( \int_0^R dr r^3 \rho(r) \right) \left( \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta \right) \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) = 0$$

8)  $S =$  asta di lunghezza  $l$  e densità lineare  $\rho(s) = \rho_0 + \mu \frac{s}{l}$

OSS: qualsiasi piano contenente l'asta è un piano di simmetria materiale

$\Rightarrow G \in \cap \{\text{piani}\} =$  retta contenente l'asta

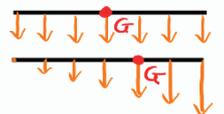
asta = segmento = insieme convesso  $\Rightarrow G \in$  asta

$$M = \int_0^l \rho(s) ds = \int_0^l \left( \rho_0 + \mu \frac{s}{l} \right) ds = \left[ \rho_0 s + \frac{\mu}{2} \frac{s^2}{l} \right]_0^l = \rho_0 l + \frac{1}{2} \mu l = \left( \rho_0 + \frac{\mu}{2} \right) l$$

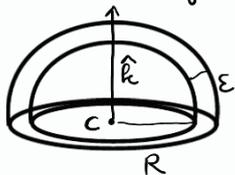
$$S_G = \frac{1}{M} \int_0^l \rho(s) s ds = \frac{1}{M} \int_0^l \left( \rho_0 + \mu \frac{s}{l} \right) s ds = \frac{1}{M} \left[ \rho_0 \frac{s^2}{2} + \frac{\mu}{l} \frac{s^3}{3} \right]_0^l = \frac{\frac{1}{2} \rho_0 l^2 + \frac{1}{3} \mu l^2}{\left( \rho_0 + \frac{\mu}{2} \right) l} = \frac{\rho_0/2 + \mu/3}{\rho_0 + \mu/2} l$$

OSS: casi particolari:  $\bullet \rho_0 \neq 0, \mu = 0 \Rightarrow S_G = \frac{l}{2} \Rightarrow G =$  pt. medio

$\bullet \rho_0 = 0, \mu \neq 0 \Rightarrow S_G = \frac{2}{3} l$



9)  $S =$  calotta sferica di raggio  $R$ , spessore  $\varepsilon$ , densità uniforme  $\rho$



Ogni piano contenente  $\hat{k}$  passante per il centro  $\hat{c}$  è un piano di simmetria materiale }  $\Rightarrow G \in$  asse  $\hat{k}$

$$M = \int_R^{R+\varepsilon} dr r^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho = \rho \left[ \frac{r^3}{3} \right]_R^{R+\varepsilon} \left[ -\cos\theta \right]_0^{\pi/2} \left[ \varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3} \rho \left[ (R+\varepsilon)^3 - R^3 \right]$$

$$Z_G = \frac{1}{M} \int_S \rho z d^3x = \frac{1}{M} \int_R^{R+\varepsilon} dr r^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho r \cos\theta = \frac{\rho}{M} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_R^{R+\varepsilon} \left[ \frac{1}{2} \sin^2\theta \right]_0^{\pi/2} \left[ \varphi \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[ (R+\varepsilon)^4 - R^4 \right] / \frac{2\pi}{3} \left[ (R+\varepsilon)^3 - R^3 \right] = \frac{3}{8} \frac{(R+\varepsilon)^4 - R^4}{(R+\varepsilon)^3 - R^3}$$

OSS: Nel limite  $\varepsilon \ll R$  con  $\rho = \sigma/\varepsilon$  ( $\sigma =$  densità di massa superficiale) si ha

$$M = \frac{2\pi}{3} \frac{\sigma}{\varepsilon} \left[ R^3 \left( 1 + 3 \frac{\varepsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2\right) \right) - R^3 \right] = 2\pi R^2 \sigma + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right) = \text{Area}(S) \cdot \sigma + \dots$$

$$Z_G = \frac{3}{8} \frac{R^4 \left[ 1 + 4 \frac{\varepsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2\right) \right] - R^4}{R^3 \left[ 1 + 3 \frac{\varepsilon}{R} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2\right) \right] - R^3} = \frac{1}{2} R + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right) = \frac{1}{2} \text{altezza} + \dots$$

## 4.2) Equazioni cardinali della statica

La statica realizza le configurazioni di equilibrio di un sistema meccanico

- problema diretto: assegnate le forze che agiscono sul sistema, determinare le configurazioni di equilibrio
- problema inverso: assegnate la configurazione di equilibrio, determinare le forze necessarie per realizzarla.
- stabilità: studiare l'effetto di perturbazioni sulle configurazioni di equilibrio.

Def: Dato un sistema di  $N$  punti materiali soggetto all'azione di un sistema di forze  $\mathcal{F} = \{ (P_i, \vec{F}_i = \vec{F}_i(P_i, \vec{v}_i, \dots; P_N, \vec{v}_N; t)) \}_{i=1, \dots, N}$ , una configurazione  $\{ P_i = P_i(t) \}_{i=1, \dots, N}$  è detta:

- in quiete se  $P_i(t) = P_i(0) = \text{cost.} \forall t > 0$  è soluzione delle eq. del moto  $m_i \ddot{x}_i = \vec{F}_i \forall i = 1, \dots, N$ ;
- in equilibrio se  $\vec{F}_i(P_i(0), \vec{0}, \dots; P_N(0), \vec{0}; t) = \vec{0} \forall t \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, N$ .

OSS: sistema in quiete/equilibrio  $\Leftrightarrow$  ogni punto individualmente in quiete/equilibrio

OSS:  $\vec{F}_i =$  risultante di tutte le forze agenti su  $P_i = \vec{F}_i^{(int)} + \vec{F}_i^{(est)} = \vec{F}_i^{(att)} + \vec{F}_i^{(vincoli)}$

OSS: quiete  $\Rightarrow$  equilibrio (infatti: quiete  $\Rightarrow \vec{v}_i(t) = \vec{a}_i(t) = \vec{0} \forall t \Rightarrow \vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = \vec{0} \Rightarrow$  equilibrio)

quiete  $\not\Leftarrow$  equilibrio (Controesempio 1D:  $F(x) = f x^{1/3}$  con  $f \in \mathbb{R}$  costante

$$\downarrow \left( \begin{array}{l} m \ddot{x} = f x^{1/3} \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x(t) = 0 \forall t \text{ è soluzione} \equiv \text{config. in quiete} \\ x(t) = \left(\frac{f}{6m}\right)^{3/2} t^3 \text{ è soluzione} \neq \text{config. in quiete.} \end{array} \right)$$

Equilibrio è condizione necessaria non sufficiente per quiete (problema di unicità)

NB: Eq. moto = legge di Newton = sistema eq. diff. II° ordine  $\left. \begin{array}{l} \\ + \text{dati iniziali per posizioni e velocità} \end{array} \right\} = \text{problema di Cauchy}$

[H<sub>0</sub>] Assumeremo sempre che  $\vec{F}_i$  soddisfino ipotesi regolarità t.c.  $\exists!$  soluzione  $\rightarrow$  determinismo.

$\Rightarrow$  quiete  $\equiv$  equilibrio

[H<sub>1</sub>] Assumeremo sempre che le forze interne siano dovute a interazioni tra coppie di punti, che rispettino il III° principio di Newton e che siano dirette lungo la congiungente dei punti interessati:

$$\vec{F}_i^{(int)} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad \text{con} \quad \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}, \quad \vec{F}_{ij} \wedge \overline{P_i P_j} = \vec{0}$$


Lemma: Ipotesi [H<sub>1</sub>]  $\Rightarrow \vec{R}^{(int)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(int)} = \vec{0}$  (risultanti interne nulle)

$$\vec{M}_O^{(int)} = \sum_{i=1}^N \overline{OP_i} \wedge \vec{F}_i^{(int)} = \vec{0}$$

$$\text{dim: } \bar{R}^{(int)} = \sum_i \bar{F}_i^{(int)} = \sum_i \sum_{j \neq i} \bar{F}_{ij} = \sum_{\{i < j\}} \bar{F}_{ij} + \sum_{\{i > j\}} \bar{F}_{ij} = \sum_{\{i < j\}} \bar{F}_{ij} + \sum_{\{j' > i'\}} \bar{F}_{j'i'} = \sum_{\{i < j\}} (\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji}) = \bar{0}$$

$$\bar{M}_O^{(int)} = \sum_i \bar{O}P_i \wedge \bar{F}_i^{(int)} = \sum_i \bar{O}P_i \wedge \left( \sum_{j \neq i} \bar{F}_{ij} \right) = \sum_i \sum_{j \neq i} \bar{O}P_i \wedge \bar{F}_{ij} = \sum_{\{i < j\}} \bar{O}P_i \wedge \bar{F}_{ij} + \sum_{\{i > j\}} \bar{O}P_i \wedge \bar{F}_{ij}$$

$$= \sum_{\{i < j\}} [\bar{O}P_i \wedge \bar{F}_{ij} + \bar{O}P_j \wedge \bar{F}_{ji}] = \sum_{\{i < j\}} (\bar{O}P_i - \bar{O}P_j) \wedge \bar{F}_{ij} = \sum_{\{i < j\}} \bar{P}_i \bar{P}_j \wedge \bar{F}_{ij} = \bar{0} \quad \square$$

Teorema (Equazioni cardinali della statica) Sotto le ipotesi  $[H_0], [H_1]$ , condizione necessaria affinché ci sia equilibrio è l'annullarsi delle risultanti esterne:

$$\bar{R}^{(est)} = \sum_i \bar{F}_i^{(est)} = \bar{0} \quad \text{e} \quad \bar{M}_O^{(est)} = \sum_i \bar{O}P_i \wedge \bar{F}_i^{(est)} = \bar{0} \quad (\forall O \in \mathcal{E}^3) \quad \text{ECS}$$

$$\text{dim: equilibrio} \Leftrightarrow \text{ogni punto singolarmente in equilibrio} \Leftrightarrow \bar{0} = \bar{F}_i = \bar{F}_i^{(est)} + \bar{F}_i^{(int)}$$

$$\Rightarrow \bar{0} = \bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \sum_i \bar{F}_i^{(est)} + \sum_i \bar{F}_i^{(int)} = \bar{R}^{(est)} + \bar{R}^{(int)} = \bar{R}^{(est)} \Rightarrow \bar{R}^{(est)} = \bar{0}$$

$$\bar{0} = \bar{M}_O = \sum_i \bar{O}P_i \wedge \bar{F}_i = \sum_i \bar{O}P_i \wedge \bar{F}_i^{(est)} + \sum_i \bar{O}P_i \wedge \bar{F}_i^{(int)} = \bar{M}_O^{(est)} + \bar{M}_O^{(int)} = \bar{M}_O^{(est)} \Rightarrow \bar{M}_O^{(est)} = \bar{0} \quad \square$$

OSS:  $\bar{R}^{(est)} = \bar{0}, \bar{M}_O^{(est)} = \bar{0}$  + proprietà del trasporto  $\Rightarrow \bar{M}_{O'}^{(est)} = \bar{M}_O^{(est)} + \bar{R}^{(est)} \wedge \bar{O}O' = \bar{0} \quad \forall O' \in \mathcal{E}^3$   
 $\Rightarrow$  basta verificare ECS per un polo fisso.

In particolare, se il sistema è formato da un unico punto materiale, basta verificare che  $\bar{R}^{(est)} = \bar{0}$ . Infatti  $\bar{M}_O^{(est)} = \bar{M}_P^{(est)} + \bar{R}^{(est)} \wedge \bar{P}O = \bar{0} \quad \forall O \in \mathcal{E}^3$ .

OSS:  $\bar{R}^{(est)} = \bar{0}, \bar{M}^{(est)} = \bar{0} \Rightarrow$  in 3D:  $R_x^{(est)} = 0, R_y^{(est)} = 0, R_z^{(est)} = 0$   
 $M_{0,x}^{(est)} = 0, M_{0,y}^{(est)} = 0, M_{0,z}^{(est)} = 0$  } 3+3=6 eq. scalari

in 2D:  $\bar{R}^{(est)} \perp \hat{k} \rightarrow R_x^{(est)} = R_y^{(est)} = 0$   
 $\bar{M}_O^{(est)} \parallel \hat{k} \rightarrow M_{0,z}^{(est)} = 0$  } 3 eq. scalari

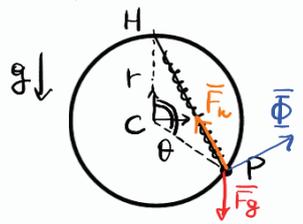
OSS: ECS condizioni necessarie ma in generale NON sufficienti per equilibrio  
Controesempio:  $P_1 \xrightarrow{\bar{F}_1} \hat{k} \xrightarrow{\bar{F}_2} P_2$  2 forze esterne  $\Rightarrow \bar{R}^{(est)} = \bar{M}_O^{(est)} = \bar{0}$   
 $\exists$  forze interne  $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2 \neq \bar{0} \Rightarrow P_1, P_2$  possono oscillare  
 $\Rightarrow$  la generica config. iniziale non è di equilibrio.

Lemma: Se il sistema è un unico corpo rigido, allora ECS sono condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio.

(Idea:  $\bar{R}^{(est)} = \bar{0} \Rightarrow$  cdm non accelera  
 $\bar{M}_O^{(est)} = \bar{0} \Rightarrow$  corpo rigido non cambia velocità angolare) }  $\Rightarrow$  Se il corpo è inizialmente in quiete, resta in quiete per tutti i tempi  
 $\hookrightarrow$  dimostrazione rigorosa tramite Principio dei Lavori Virtuali (vedi poi)

OSS: Le ECS si applicano anche ai sottosistemi di un dato sistema.  
 $\hookrightarrow$  Equilibrio in corpo articolato  $\Leftrightarrow$  equilibrio in ogni componente rigida  
 $\Leftrightarrow$  ECS in ogni componente rigida.

Esempio: Determinare le config di equilibrio di un punto materiale di massa  $m$  vincolato a muoversi su una guida circolare verticale e collegato al punto più alto della circonferenza tramite una molla di costante elastica  $k$



Forze applicate in P:

- Forza peso:  $\bar{F}_g = -mg\hat{j}$
- Forza elastica:  $\bar{F}_k = k\bar{P}H = k(\bar{O}H - \bar{O}P) = k[-r\sin\theta\hat{i} + (r - r\cos\theta)\hat{j}]$
- Reazione vincolare:  $\bar{\Phi} = \Phi_x\hat{i} + \Phi_y\hat{j} \rightarrow$  incognita

$$\begin{cases} \bar{e}_r = \sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} \\ \bar{e}_\theta = -\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{i} = \sin\theta\bar{e}_r - \cos\theta\bar{e}_\theta \\ \hat{j} = \cos\theta\bar{e}_r + \sin\theta\bar{e}_\theta \end{cases}$$

Pt. materiale  $\equiv$  corpo rigido  $\rightarrow$  equilibrio  $\Leftrightarrow \bar{R} = \bar{R}^{(est)} = \bar{0}$  ( $\bar{M}_p = \bar{M}_p^{(est)} = \bar{0}$ )

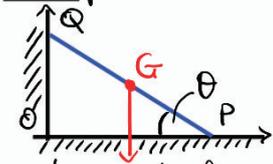
$$\begin{aligned} \bar{R} &= \bar{F}_g + \bar{F}_k + \bar{\Phi} = (-kr \sin \theta + \phi_x) \hat{i} + (-mg + kr(1 - \cos \theta) + \phi_y) \hat{j} = \bar{0} \\ &= -mg(\cos \theta \bar{e}_r + \sin \theta \bar{e}_\theta) + kr[-\sin \theta (\sin \theta \bar{e}_r - \cos \theta \bar{e}_\theta) + (1 - \cos \theta)(\cos \theta \bar{e}_r + \sin \theta \bar{e}_\theta)] + \phi_\perp \bar{e}_r + \phi_\parallel \bar{e}_\theta \\ &= [-mg \cos \theta - kr \sin^2 \theta + kr(1 - \cos \theta) \cos \theta + \phi_\perp] \bar{e}_r + [-mg \sin \theta + kr \sin \theta \cos \theta + kr(1 - \cos \theta) \sin \theta + \phi_\parallel] \bar{e}_\theta \\ &= [(kr - mg) \cos \theta - kr + \phi_\perp] \bar{e}_r + [(kr - mg) \sin \theta + \phi_\parallel] \bar{e}_\theta \\ &\Rightarrow \begin{cases} \phi_x = kr \sin \theta \\ \phi_y = mg - kr(1 - \sin \theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_\perp = kr - (kr - mg) \cos \theta \\ \phi_\parallel = -(kr - mg) \sin \theta \end{cases} \end{aligned}$$

• guida liscia:  $\bar{\Phi} = \phi \bar{e}_r \Rightarrow 0 = \bar{\Phi} \cdot \bar{e}_\theta = \phi_\parallel = -(kr - mg) \sin \theta < \begin{matrix} \theta = 0 \vee \theta = \pi \\ kr = mg \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) \end{matrix}$

• guida scabra:  $\bar{\Phi} = \phi_\perp \bar{e}_r + \phi_\parallel \bar{e}_\theta$  con  $|\phi_\parallel| \leq \mu_s |\phi_\perp|$  (Coulomb-Morin)

$$\Rightarrow |kr - mg| |\sin \theta| \leq \mu_s |kr - (kr - mg) \cos \theta| \rightarrow \text{Esercizio}$$

Esempio: Determinare le config. di equilibrio per una scala appoggiata ad un muro  
 scala  $\equiv$  asta omogenea di lunghezza  $l$ , massa  $m$  (densità  $\rho = m/l$ )  
 $L \rightarrow$  vincoli di contatto:  $P \in \text{axe } \hat{i}$   
 $Q \in \text{axe } \hat{j} \} \Rightarrow 1! \text{ gal} \rightarrow$  coord libere =  $\theta \in [0, \pi/2)$



Sistema di forze: • forze peso applicate nel baricentro G:  $\bar{O}G = \frac{l}{2}(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$ ,  $\bar{F}_G = -mg \hat{j}$   
 • reazione vincolare in P:  $\bar{O}P = l \cos \theta \hat{i}$ ,  $\bar{F}_P = \phi_{Px} \hat{i} + \phi_{Py} \hat{j}$   
 • " " " Q:  $\bar{O}Q = l \sin \theta \hat{j}$ ,  $\bar{F}_Q = \phi_{Qx} \hat{i} + \phi_{Qy} \hat{j}$

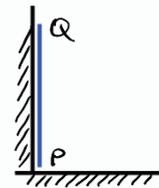
$$\bar{R}^{(est)} = \bar{F}_G + \bar{F}_P + \bar{F}_Q = (\phi_{Px} + \phi_{Qx}) \hat{i} + (-mg + \phi_{Py} + \phi_{Qy}) \hat{j}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_O^{(est)} &= \bar{O}G \wedge \bar{F}_G + \bar{O}P \wedge \bar{F}_P + \bar{O}Q \wedge \bar{F}_Q = \frac{l}{2} \cos \theta (mg) (-\hat{k}) + l \cos \theta \phi_{Py} \hat{k} + l \sin \theta \phi_{Qx} (-\hat{k}) \\ &= \left[ -\frac{1}{2} mgl \cos \theta + l \phi_{Py} \cos \theta - l \phi_{Qx} \sin \theta \right] \hat{k} \end{aligned}$$

Equilibrio  $\Rightarrow \bar{R}^{(est)} = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{Px} + \phi_{Qx} = 0 \\ \phi_{Py} + \phi_{Qy} = mg \end{cases}$  } sistema lineare di 3 eq. in 5 incognite  
 $\bar{M}_O^{(est)} = \bar{0} \Rightarrow l \sin \theta \phi_{Qx} - l \cos \theta \phi_{Py} = -\frac{1}{2} mgl \cos \theta$  }  $\rightarrow$  sottodeterminato.

• appoggi lisci:  $\bar{F}_P \perp \hat{i}$ ,  $\bar{F}_Q \perp \hat{j} \Rightarrow \phi_{Px} = 0, \phi_{Qy} = 0$

$$\begin{cases} \phi_{Qx} = 0 \\ \phi_{Py} = mg \\ -l \cos \theta mg = -\frac{1}{2} mgl \cos \theta \rightarrow \cos \theta = 0 \rightarrow \theta = \pi/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{cono limite} \\ \text{con asta} \\ \text{verticale} \end{matrix}$$



Esercizio: studiare config. con asta orizzontale

• appoggi scabri:  $|\phi_{Px}| \leq \mu_P |\phi_{Py}|$ ,  $|\phi_{Qy}| \leq \mu_Q |\phi_{Qx}|$  (Coulomb-Morin)  
 Intuito fisico:  $\phi_{Px} < 0, \phi_{Py} > 0, \phi_{Qx} > 0, \phi_{Qy} > 0$  ( $\mu_P < 1, \mu_Q < 1$ )

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_{Qx} = -\phi_{Px} = \mu_P \phi_{Py} \\ \phi_{Py} = mg - \phi_{Qy} = mg - \mu_Q \mu_P \phi_{Py} \\ \mu_P \phi_{Py} \sin \theta - (mg - \mu_P \mu_Q \phi_{Py}) \cos \theta = -\frac{1}{2} mgl \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{Px} = -\frac{\mu_P}{1 + \mu_P \mu_Q} mg, \quad \phi_{Py} = \frac{1}{1 + \mu_P \mu_Q} mg \\ \phi_{Qx} = \frac{\mu_P}{1 + \mu_P \mu_Q} mg, \quad \phi_{Qy} = \frac{\mu_P \mu_Q}{1 + \mu_P \mu_Q} mg \\ \frac{\mu_P}{1 + \mu_P \mu_Q} \sin \theta - \left( \frac{1 - \mu_P \mu_Q}{1 + \mu_P \mu_Q} \right) \cos \theta = -\frac{1}{2} \cos \theta \end{cases}$$

Problema diretto: assegnati  $\mu_P, \mu_Q$ , trovare  $\theta_x =$  angolo equilibrio

$$\mu_P = \mu_Q = 0,27 \text{ (gomma su ghiaccio)} \Rightarrow \tan \theta_x \approx 1,27 \Rightarrow \theta_x \approx \pi/3$$

Problema inverso: assegnato  $\theta_x$ , trovare  $\mu_P, \mu_Q$  che lo realizzano

$$\theta_x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \theta_x = \frac{1 - \mu_P \mu_Q}{2\mu_P} \rightarrow \mu_P = \frac{1}{2\sqrt{3} + \mu_Q} \text{ e } \mu_Q \in (0,1)$$

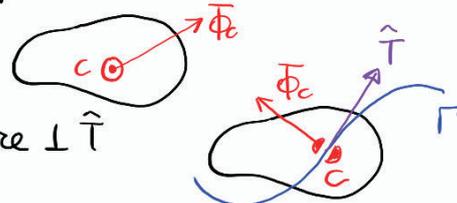
$$\rightarrow \mu_Q = \frac{1}{\mu_P} - \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ e } \mu_P \in \left( \frac{1}{1 + 2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

NB: Se si appoggia qualcosa alla scala si deve rifare tutto dall'inizio.

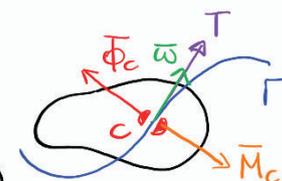
## ▷ Vincoli e reazioni vincolari

Consideriamo un corpo rigido  $\mathcal{C}$  soggetto a forze attive e reazioni vincolari. Per via del principio delle reazioni vincolari e del teorema di riduzione di sistemi di forze, ogni vincolo può essere rappresentato al più da una forza ed una coppia di forze o, equivalentemente, da una forza e da un momento di forze.

(1) Cerniera fissa:  $C \in \mathcal{C}$  fisso  $\Rightarrow \exists \vec{\Phi}_C$  reazione vincolare  
 $\mathcal{C}$  libero di rotore  $\Rightarrow \nexists \vec{M}_C$  momento



(2) Carrello:  $C \in \mathcal{C}$  scorre lungo  $\Gamma \Rightarrow \exists \vec{\Phi}_C$  reazione vincolare  $\perp \hat{T}$   
 $\mathcal{C}$  libero di rotore  $\Rightarrow \nexists \vec{M}_C$  momento

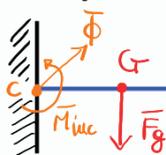


(3) Manicotto:  $C \in \mathcal{C}$  scorre lungo  $\Gamma \Rightarrow \exists \vec{\Phi}_C$  reazione vincolare  $\perp \hat{T}$   
 $\mathcal{C}$  può rotore solo con  $\vec{\omega} \parallel \hat{T} \Rightarrow \exists \vec{M}_C$  momento  $\perp \hat{T}$

(3a) Pattino: manicotto che impedisce ogni rotazione  $\rightarrow \exists \vec{\Phi}_C$  reaz. vinc.  $\perp \hat{T}$   
 $\exists \vec{M}_C$  momento (non neces.  $\perp \hat{T}$ )

(3b) Incastro: pattino che impedisce ogni traslazione  $\rightarrow \exists \vec{\Phi}_C$  reaz. vinc. (non neces.  $\perp \hat{T}$ )  
 $\exists \vec{M}_C$  momento (non neces.  $\perp \hat{T}$ )

Esempio: un'asta omogenea di lunghezza  $l$  e densità  $\rho$  è vincolata ad una parete verticale tramite un incastro in uno degli estremi. Determinare le reazioni vincolari t.c. la configurazione con l'asta orizzontale è di equilibrio.



$$\mathcal{F} = \{(G, \vec{F}_g), (C, \vec{\Phi}_C)\} \text{ con } \vec{F}_g = -mg\hat{j}, \quad \vec{C}G = \frac{l}{2}\hat{i}$$

$$\text{Equilibrio} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{R} = \vec{F}_g + \vec{\Phi}_C \Rightarrow \vec{\Phi}_C = -\vec{F}_g = mg\hat{j}$$

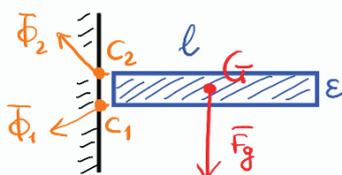
$$\vec{0} = \vec{M}_C = \vec{C}G \wedge \vec{\Phi}_C + \vec{C}G \wedge \vec{F}_g = \frac{l}{2}\hat{i} \wedge (-mg\hat{j}) = -\frac{1}{2}mgl\hat{k} \neq \vec{0} \quad \nabla$$

Per realizzare la configurazione di equilibrio con l'asta orizzontale è necessario introdurre un momento torcente reattivo che agisce nell'incastro  $C$  (che impedisca le rotazioni)

$$\vec{M}_{inc} = \text{"momento d'incastro"} \quad \text{t.c. } \vec{M}_C + \vec{M}_{inc} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{inc} = -\vec{M}_C = \frac{1}{2}mgl\hat{k} \quad \curvearrowright \vec{M}_{inc}$$

OSS: In casi come questo, sarebbe più appropriato trattare due corpi rigidi collegati tramite un incastro come un unico corpo rigido (non possono rotore e/o traslare uno rispetto all'altro. In questo modo,  $\vec{\Phi}_C$  e  $\vec{M}_C$  sarebbero forze interne (bilanciate per ipotesi) che non giocano alcun ruolo nelle ECS (queste coinvolgono solo risultanti esterne).

OSS: "problema interpretativo" dovuto ad eccessiva idealizzazione. Si può fare un'analisi più accurata considerando un'asta di spessore  $\varepsilon$  e lunghezza  $l$ , con  $\varepsilon \ll l$ .



$$\mathcal{F} = \{(C_1, \vec{\Phi}_1), (C_2, \vec{\Phi}_2), (G, \vec{F}_g)\}, \quad \vec{C}_1G = \frac{l}{2}\hat{i} + \frac{\varepsilon}{2}\hat{j}, \quad \vec{C}_1C_2 = \varepsilon\hat{j}$$

$$\vec{R} = \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2 + \vec{F}_g = (\Phi_{1x} + \Phi_{2x})\hat{i} + (\Phi_{1y} + \Phi_{2y} - mg)\hat{j}$$

$$\vec{M}_C = \vec{C}_1G \wedge \vec{\Phi}_1 + \vec{C}_1C_2 \wedge \vec{\Phi}_2 + \vec{C}_1G \wedge \vec{F}_g = \varepsilon\hat{j} \wedge (\Phi_{2x}\hat{i} + \Phi_{2y}\hat{j}) + (\frac{l}{2}\hat{i} + \frac{\varepsilon}{2}\hat{j}) \wedge (-mg\hat{j}) = (-\varepsilon\Phi_{2x} - \frac{1}{2}mgl)\hat{k}$$

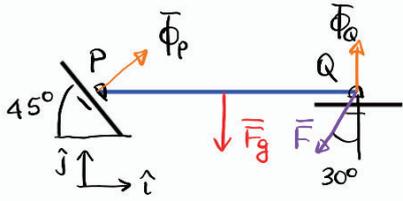
$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_{1x} + \Phi_{2x} = 0 \\ \Phi_{1y} + \Phi_{2y} = mg \\ \Phi_{2x} = -\frac{1}{2}\frac{l}{\varepsilon}mg \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \Phi_{1y} + \Phi_{2y} = mg \rightarrow \text{singole componenti verticali indeterminate} \\ \Phi_{1x} = -\Phi_{2x} = \frac{1}{2}\frac{l}{\varepsilon}mg \rightarrow \text{coppia orizzontale} \end{cases} \sim \text{iperstatico}$$

$\varepsilon \ll l \Rightarrow \begin{cases} C_1 \sim C_2 \\ \Phi_1 \approx -\Phi_2 \sim \frac{mg\hat{i}}{2(\varepsilon/l)} \end{cases}$  Coppia di forze divergenti con punti di applicazione sovrapposti  
 t.c. nel limite risultante e momento restano finiti

$$\vec{M}_O^{(\Phi)} = \vec{O}C_1 \wedge \vec{\Phi}_1 + \vec{O}C_2 \wedge \vec{\Phi}_2 = \vec{C}_1C_2 \wedge \vec{\Phi}_2 = \frac{1}{2}mgl\hat{k} = -\vec{M}_O^{(g)}$$

Esempio: Asta omogenea di lunghezza  $l$  e densità  $\rho$ , vincolata tramite una coppia di correlli agli estremi e su cui agisce una forza  $\vec{F}$  come in figura. Determinare  $F = |\vec{F}|$  t.c. il sistema è in equilibrio.



$$\mathcal{M} = \{(P, \vec{\Phi}_P), (G, \vec{F}_g), (Q, \vec{\Phi}_Q + \vec{F})\}$$

Correlli P, Q (attrito radente):  $\vec{\Phi}_P = \Phi_P \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j} \right)$ ,  $\vec{\Phi}_Q = \Phi_Q \hat{j}$

Peso:  $\vec{F}_g = -mg \hat{j}$  ( $G = \text{baricentro} = \text{pt. medio di } PQ, m = \rho l$ )

Forza:  $\vec{F} = F \left( -\frac{1}{2} \hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{j} \right)$

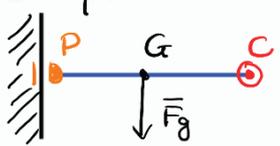
Asta = corpo rigido  $\rightarrow$  equilibrio  $\Leftrightarrow \vec{R} = \vec{0}$  e  $\vec{M}_O = \vec{0}$  (per qualche  $O$ )

$$\vec{R} = \vec{\Phi}_P + \vec{F}_g + \vec{\Phi}_Q + \vec{F} = (\Phi_P/\sqrt{2} - F/2) \hat{i} + (\Phi_P/\sqrt{2} - mg + \Phi_Q - \sqrt{3}F/2) \hat{j} \Rightarrow \Phi_P = \frac{F}{\sqrt{2}}, \Phi_Q = mg + \frac{\sqrt{3}-1}{2} F$$

$$\vec{M}_P = \vec{PG} \wedge \vec{F}_g + \vec{PQ} \wedge (\vec{\Phi}_Q + \vec{F}) = \frac{l}{2} \hat{i} \wedge (-mg \hat{j}) + l \hat{i} \wedge (\Phi_Q \hat{j} - \frac{F}{2} \hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} F \hat{j})$$

$$= -\frac{1}{2} mgl \hat{k} + l \left( mg + \frac{\sqrt{3}-1}{2} F - \frac{\sqrt{3}}{2} F \right) \hat{k} = \left[ \frac{1}{2} mgl - \frac{1}{2} lF \right] \hat{k} \Rightarrow F = mg \Rightarrow \Phi_P = \frac{mg}{\sqrt{2}}, \Phi_Q = \frac{\sqrt{3}+1}{2} mg$$

Esempio: Un'asta omogenea di lunghezza  $l$  e densità  $\rho$  è vincolata tramite una cerniera fissa C ed un carrello P come in figura. Trovare le reazioni vincolari nella configurazione di equilibrio.



$$\mathcal{M} = \{(G, \vec{F}_g), (P, \vec{\Phi}_P), (C, \vec{\Phi}_C)\} \text{ con } \vec{F}_g = -mg \hat{j}, \vec{CG} = -\frac{l}{2} \hat{i}$$

$$\vec{\Phi}_P = \Phi_P \hat{i}, \vec{\Phi}_C = \Phi_{Cx} \hat{i} + \Phi_{Cy} \hat{j}$$

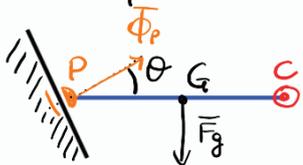
1! corpo rigido  $\Rightarrow$  (equilibrio  $\Leftrightarrow$  ECS)

$$\vec{0} = \vec{R} = \vec{F}_g + \vec{\Phi}_P + \vec{\Phi}_C = (\Phi_P + \Phi_{Cx}) \hat{i} + (\Phi_{Cy} - mg) \hat{j} \Rightarrow \Phi_{Cx} = -\Phi_P, \Phi_{Cy} = mg$$

$$\vec{0} = \vec{M}_C = \vec{CG} \wedge \vec{F}_g + \vec{CP} \wedge \vec{\Phi}_P + \vec{CC} \wedge \vec{\Phi}_C = \left( -\frac{l}{2} \hat{i} \right) \wedge (-mg \hat{j}) + (-l \hat{i}) \wedge (\Phi_P \hat{i}) = \frac{1}{2} mgl \hat{k} \quad \nabla$$

NB: Si tratta di un sistema singolare labile perché non ammette moti diversi dalla quiete, ma ammette atti di moto non banali compatibili con i vincoli.

NB: Il problema non si presenta se l'asta non è perfettamente ortogonale alla parete.



# qdL = 0  $\rightarrow$  sistema vincolato

$\theta =$  angolo di inclinazione della parete

$$\mathcal{M} = \{(G, \vec{F}_g), (P, \vec{\Phi}_P), (C, \vec{\Phi}_C)\} \text{ con } \vec{\Phi}_P = \Phi_P (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}), \vec{\Phi}_C = \Phi_{Cx} \hat{i} + \Phi_{Cy} \hat{j}$$

$$\text{ECS: } \vec{0} = \vec{R} = \vec{F}_g + \vec{\Phi}_P + \vec{\Phi}_C = (\Phi_P \cos \theta + \Phi_{Cx}) \hat{i} + (-mg + \Phi_P \sin \theta + \Phi_{Cy}) \hat{j}$$

$$\vec{0} = \vec{M}_C = \vec{CG} \wedge \vec{F}_g + \vec{CP} \wedge \vec{\Phi}_P + \vec{CC} \wedge \vec{\Phi}_C = \left( -\frac{l}{2} \hat{i} \right) \wedge (-mg \hat{j}) + (-l \hat{i}) \wedge (\Phi_P \cos \theta \hat{i} + \Phi_P \sin \theta \hat{j})$$

$$= \left[ \frac{1}{2} mgl - \Phi_P l \sin \theta \right] \hat{k} = \left[ \frac{1}{2} mg - \Phi_P \sin \theta \right] l \hat{k}$$

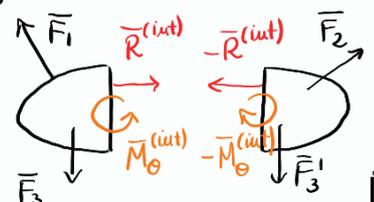
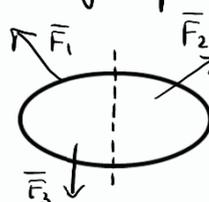
$$\Rightarrow \Phi_P = \frac{mg}{2 \sin \theta}, \Phi_{Cx} = -\frac{mg}{2 \tan \theta}, \Phi_{Cy} = \frac{1}{2} mg \Rightarrow \Phi_P \sim -\Phi_{Cx} \sim \frac{mg}{2\theta} \text{ per } \theta \rightarrow 0$$

$\hookrightarrow$  Reazioni vincolari divergenti nel limite di asta ortogonale ( $\theta \rightarrow 0$ ).

### ▷ Reazioni interne (scomposizione di corpi rigidi)

Per studiare la statica di un corpo rigido su cui agisce un sistema di forze, può essere conveniente decomporre il corpo in più parti e analizzarle separatamente. In questa operazione ci si deve sempre ricordare che sulle singole parti agiscono inizialmente delle forze interne:

reazioni interne  $\rightarrow$  presenti in ECS per intero corpo  
 $\rightarrow$  presenti in ECS per singole parti



Basandosi ancora sul principio delle reazioni vincolari e sul teorema di riduzione, si può concludere che le reazioni interne sono sempre descritte da una forza e una coppia di forze.

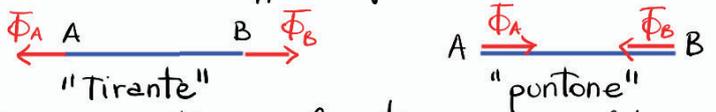
OSS: decomporre un corpo rigido in due parti equivale a rimuovere un vincolo di incastro (o due/tre cerniere fisse) tra le parti.

Esempio: Biella = asta rettilinea scarica

- 2 forze esterne applicate ai punti interni (NO forza peso  $\leftrightarrow$  momento nullo)
- Forze reattive concentrate agli estremi
- Vincoli agli estremi non esercitano momenti torcenti (NO manico, peltini, incastri).

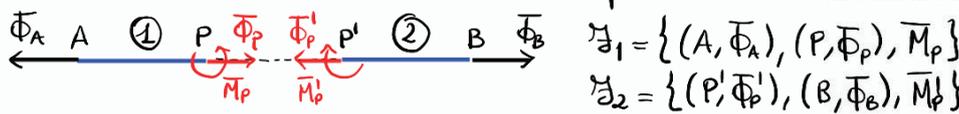
1! corpo rigido  $\Rightarrow$  (equilibrio  $\Leftrightarrow$  ECS)

$$\begin{aligned} \vec{0} = \vec{R}^{(est)} = \vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_B &\Rightarrow \vec{\Phi}_B = -\vec{\Phi}_A \\ \vec{0} = \vec{M}_O^{(est)} = \vec{OA} \wedge \vec{\Phi}_A + \vec{OB} \wedge \vec{\Phi}_B &= \vec{AB} \wedge \vec{\Phi}_B \end{aligned} \Rightarrow \vec{\Phi}_B, \vec{\Phi}_A \parallel \vec{AB} \rightarrow \text{coppia di forze a braccio nullo}$$



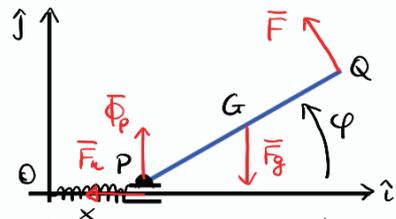
Sezionando l'asta in un punto interno P, per mantenere il sistema in equilibrio si devono esplicitare le reazioni interne in P

OSS: P ~ incastro: AP non ruota rispetto a PB  $\rightarrow$  momento torcente reattivo



$$\begin{aligned} \text{ECS 1: } \vec{0} = \vec{R}^{(1)} = \vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_P &\Rightarrow \vec{\Phi}_P = -\vec{\Phi}_A \quad \text{ECS 2: } \vec{0} = \vec{R}^{(2)} = \vec{\Phi}_P + \vec{\Phi}_B &\Rightarrow \vec{\Phi}_P = -\vec{\Phi}_B \\ \vec{0} = \vec{M}_P^{(1)} = \vec{PP'} \wedge \vec{\Phi}_P + \vec{PA} \wedge \vec{\Phi}_A & \quad \vec{M}_P = \vec{0} \quad \parallel \quad \vec{0} = \vec{M}_{P'}^{(2)} = \vec{P'B} \wedge \vec{\Phi}_P + \vec{P'B} \wedge \vec{\Phi}_B + \vec{M}_P' & \vec{M}_P = \vec{0} \end{aligned}$$

Esercizio: Studiare la statica del sistema rappresentato in figura



PQ = asta rigida rettilinea omogenea, lunghezza  $l$ , massa  $m$ ;  
 $G$  = baricentro di PQ;  $P$  = cernello;  
 $F$  = forza applicata in Q,  $\perp PQ$ ;  
 $\vec{OP}$  = molla ideale di costante elastica  $k$

Conteggio gdl: PQ asta  $\rightarrow$  3 gdl  $\Rightarrow$  2 gdl  $\left\{ \begin{array}{l} \perp$  traslazionale  $x = |\vec{OP}| \in \mathbb{R}$  \\ \perp rotazionale  $\varphi = \widehat{PQ} \hat{i} \in [0, 2\pi)$  \\ P cernello  $\rightarrow$  -1 gdl

Sistema di forze  $\mathcal{F} = \{(P, \vec{F}_k + \vec{\Phi}), (G, \vec{F}_g), (Q, \vec{F})\}$

equilibrio  $\begin{aligned} \vec{OP} = x \hat{i}, \vec{F}_k = -kx \hat{i}, \vec{\Phi} = \phi \hat{j}; \\ \vec{PQ} = l(\cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j}), \vec{F} = F(-\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j}), \vec{F}_g = -mg \hat{j} \end{aligned}$

ECS:  $\vec{0} = \vec{R} = (-kx \hat{i}) + (\phi \hat{j}) + (-mg \hat{j}) + F(-\sin\phi \hat{i} + \cos\phi \hat{j}) = (-kx - F \sin\phi) \hat{i} + (\phi - mg + F \cos\phi) \hat{j}$   
 $\vec{0} = \vec{M}_P = \vec{PP'} \wedge (\vec{F}_k + \vec{\Phi}) + \vec{PG} \wedge \vec{F}_g + \vec{PQ} \wedge \vec{F}_Q = (\frac{1}{2} l \cos\phi mg)(-\hat{k}) + l F \hat{k} = l(F - \frac{1}{2} mg \cos\phi) \hat{k}$

$\Rightarrow \begin{cases} -kx - F \sin\phi = 0 \\ \phi - mg + F \cos\phi = 0 \\ F - \frac{1}{2} mg \cos\phi = 0 \end{cases}$  Problema diretto:  $F$  assegnata  $\rightarrow$  3 eq. in 3 incognite  $x, \phi, \phi = |\phi|$   
 Problema inverso:  $x, \phi$  assegnate  $\rightarrow$  3 eq. in 2 incognite  $F, \phi$   
 $\hookrightarrow$  potrebbe non ammettere soluzione

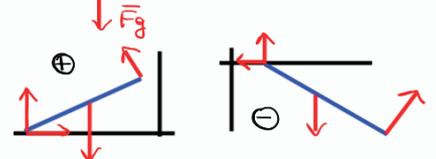
a) Problema diretto:  $\cos\phi = \frac{2F}{mg} = \lambda$

•  $\lambda > 1 \rightarrow$  2 soluzioni ( $F$  troppo grande per essere bilanciata da forze peso)

•  $\lambda = 1 \rightarrow \phi = 0 \rightarrow x = 0$   
 $\phi = mg - F = \frac{1}{2} mg = F \Rightarrow \exists!$  soluzione



•  $\lambda < 1 \rightarrow \phi = \pm \arccos \lambda \rightarrow x = \mp \frac{F}{k} \sqrt{1 - \lambda^2} \Rightarrow \exists 2$  soluzioni  
 $\phi = mg(1 - \frac{\lambda^2}{2}) > 0$

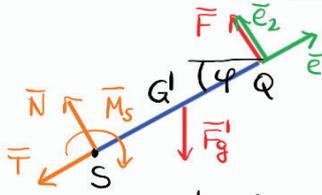


b) Problema inverso:  $\cos \varphi = \lambda$ ,  $\sin \varphi = \sqrt{1-\lambda^2}$

$$\begin{cases} F = \frac{1}{2}mg\lambda = \mp \frac{kx}{\sqrt{1-\lambda^2}} \\ \phi = mg - F\lambda = mg(1 - \frac{\lambda^2}{2}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi > 0, x < 0 \quad (+) \\ \frac{1}{2}mg\lambda = -\frac{kx}{\sqrt{1-\lambda^2}} \end{cases} \vee \begin{cases} \varphi < 0, x > 0 \quad (-) \\ \frac{1}{2}mg\lambda = \frac{kx}{\sqrt{1-\lambda^2}} \end{cases}$$

Oss: In entrambi i casi deve valere  $\frac{kx}{mg} = \frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{2|\lambda|/\ell} =$  numero puro determinato da  $\varphi, x$

▷ Determinare le azioni interne all'asta PQ, partendo da Q.



S = punto in cui si "taglia" l'asta,  $|\overline{QS}| = s \in [0, \ell]$

$\overline{T}$  = sforzo assiale,  $\overline{N}$  = sforzo di taglio,  $\overline{M}_s$  = momento torcente

$$\overline{F}_g' = -m_{QS}g\hat{j} = -m\frac{\Delta}{\ell}g\hat{j}, \quad |\overline{SG}| = |\overline{QG}| = s/2$$

Conviene introdurre il sist. di rif.  $(Q, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \hat{k}\})$  solidale all'asta:

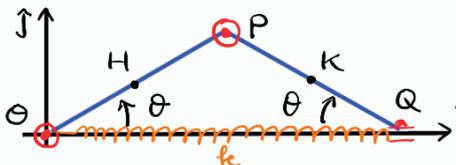
$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \bar{e}_2 = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \hat{i} = \cos \varphi \bar{e}_1 - \sin \varphi \bar{e}_2 \\ \hat{j} = \sin \varphi \bar{e}_1 + \cos \varphi \bar{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{T} = -T\bar{e}_1, \overline{N} = N\bar{e}_2, \overline{M}_s = -M_s\hat{k} \\ \overline{QS} = -s\bar{e}_1, \overline{F} = F\bar{e}_2 \end{cases}$$

$$\text{ECS: } \overline{0} = \overline{R} = \overline{T} + \overline{N} + \overline{F}_g' + \overline{F} = (-T - m\frac{\Delta}{\ell}g\sin\varphi)\bar{e}_1 + (N - m\frac{\Delta}{\ell}g\cos\varphi + F)\bar{e}_2$$

$$\begin{aligned} \overline{0} = \overline{M}_s^{(\text{tot})} &= \overline{M}_s + \overline{SG} \wedge \overline{F}_g' + \overline{SQ} \wedge \overline{F} = -M_s\hat{k} + \frac{\Delta}{2}\bar{e}_1 \wedge (-m\frac{\Delta}{\ell}g)(\sin\varphi\bar{e}_1 + \cos\varphi\bar{e}_2) + s\bar{e}_1 \wedge F\bar{e}_2 \\ &= [-M_s - \frac{1}{2}m\frac{\Delta^2}{\ell}g\cos\varphi + sF]\hat{k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{T} = -T\bar{e}_1 = mg\frac{\Delta}{\ell}\sin\varphi\bar{e}_1, \quad \overline{N} = N\bar{e}_2 = (mg\frac{\Delta}{\ell}\cos\varphi - F)\bar{e}_2 \\ \overline{M}_s = [\frac{1}{2}mg\frac{\Delta}{\ell}\cos\varphi - F]s\hat{k} \rightarrow \frac{d}{ds}\overline{M}_s = -\overline{T} \end{cases} \text{NB: } \varphi = \text{angolo associato all'equilibrio.}$$

Esercizio: Studiare la statica del sistema rappresentato in figura



OP, PQ = aste rigide di lunghezza  $\ell$  e massa  $m$ ;

H = baricentro di OP, K = baricentro di PQ;

O = cerniera fissa, P = cerniera mobile, Q = carrello;

OQ = molla ideale di costante elastica  $k$ .

$$\text{Conteggio gdl: } \begin{cases} OP \rightarrow 2+1 \\ PQ \rightarrow 2+1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} O \rightarrow -2 \\ P \rightarrow -2 \\ Q \rightarrow -1 \end{array} \right. \Rightarrow 1 \text{ gdl con coord libere } \theta = \widehat{QOP} \in [0, 2\pi)$$

Equilibrio sistema articolato  $\Leftrightarrow$  equilibrio singole componenti rigide  $\Leftrightarrow$  ECS

• Sistema OP:  $\mathcal{A}_1 = \{(O, \overline{F}_O + \overline{F}_O), (H, \overline{F}_H), (P, \overline{F}_P)\}$  con  $\overline{OH} = \frac{\ell}{2}(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}), \overline{F}_H = -mg\hat{j}$   
 $\overline{OP} = \ell(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}), \overline{F}_O = 2k\ell\cos\theta\hat{i}$

$$\text{ECS}_1: \overline{0} = \overline{R}^{(1)} = \overline{F}_O + 2k\ell\cos\theta\hat{i} - mg\hat{j} + \overline{F}_P = (\phi_{Ox} + \phi_{Px} + 2k\ell\cos\theta)\hat{i} + (\phi_{Oy} + \phi_{Py} - mg)\hat{j}$$

$$\overline{0} = \overline{M}_O^{(1)} = \overline{OH} \wedge \overline{F}_H + \overline{OP} \wedge \overline{F}_P = \overline{OP} \wedge (\frac{1}{2}\overline{F}_H + \overline{F}_P) = \ell(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) \wedge (-\frac{1}{2}mg\hat{j} + \phi_{Px}\hat{i} + \phi_{Py}\hat{j})$$

$$= [\ell\cos\theta(-\frac{1}{2}mg + \phi_{Py}) - \ell\sin\theta\phi_{Px}]\hat{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_{Ox} + \phi_{Px} + 2k\ell\cos\theta = 0 \\ \phi_{Oy} + \phi_{Py} - mg = 0 \\ (\phi_{Py} - \frac{1}{2}mg)\cos\theta - \phi_{Px}\sin\theta = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 3 \text{ eq. in 5 incognite } \phi_{Ox}, \phi_{Oy}, \phi_{Px}, \phi_{Py}, \theta \\ \hookrightarrow \text{non-lineari in } \theta \end{array}$$

• Sistema PQ:  $\mathcal{A}_2 = \{(P, \overline{F}_P'), (K, \overline{F}_K), (Q, \overline{F}_Q + \overline{F}_Q)\}$  con  $\overline{OQ} = 2\ell\cos\theta\hat{i}, \overline{F}_Q = k\overline{OQ} = 2k\ell\cos\theta\hat{i}, \overline{F}_Q = \phi_Q\hat{i}$   
 $\overline{OK} = \frac{3}{2}\ell\cos\theta\hat{i} + \frac{1}{2}\ell\sin\theta\hat{j}, \overline{F}_K = -mg\hat{j}$

$$\text{ECS}_2: \overline{0} = \overline{R}^{(2)} = \overline{F}_P' - mg\hat{j} + \phi_Q\hat{i} - 2k\ell\cos\theta\hat{i} = (\phi_{Px}' - 2k\ell\cos\theta)\hat{i} + (\phi_{Py}' - mg + \phi_Q)\hat{j}$$

$$\overline{0} = \overline{M}_P^{(2)} = \overline{PK} \wedge \overline{F}_K + \overline{PQ} \wedge (\overline{F}_Q + \overline{F}_Q) = \overline{PQ} \wedge (\frac{1}{2}\overline{F}_K + \overline{F}_Q + \overline{F}_Q)$$

$$= \ell(\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j}) \wedge (-\frac{1}{2}mg\hat{j} + \phi_Q\hat{i} - 2k\ell\cos\theta\hat{i}) = [\ell\cos\theta(-\frac{1}{2}mg + \phi_Q) - \ell\sin\theta(2k\ell\cos\theta)]\hat{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_{Px}' - 2k\ell\cos\theta = 0 \\ \phi_{Py}' + \phi_Q - mg = 0 \\ (\phi_Q - \frac{1}{2}mg - 2k\ell\sin\theta)\cos\theta = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 3 \text{ eq. in 4 incognite } \phi_{Px}', \phi_{Py}', \phi_Q, \theta \\ \hookrightarrow \text{non-lineari in } \theta \end{array}$$

• Sistema P:  $\mathcal{F}_3 = \{(P, \vec{F}_P + \vec{F}_P^i)\}$

↳ Punto materiale  $\Rightarrow$  ECS<sub>3</sub>:  $\vec{0} = \vec{R}^{(3)} = \vec{F}_P + \vec{F}_P^i \Rightarrow \begin{cases} \Phi_{Px} + \Phi_{Px}^i = 0 \\ \Phi_{Py} + \Phi_{Py}^i = 0 \end{cases}$  2 eq. in 4 incognite  $\Phi_{Px}, \Phi_{Py}, \Phi_{Px}^i, \Phi_{Py}^i$

Ricapitolando: 8 eq. in 8 incognite

$$\begin{cases} \Phi_{Px} = -\Phi_{Px}^i = -2kl \cos\theta \\ \Phi_{Py} = -\Phi_{Py}^i = \Phi_Q - mg \\ \Phi_{Ox} = 0 \\ \Phi_{Oy} = 2mg - \Phi_Q \\ (\Phi_Q - \frac{3}{2}mg + 2kl \sin\theta) \cos\theta = 0 \\ (\Phi_Q - \frac{1}{2}mg - 2kl \sin\theta) \cos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \neq \pm \pi/2 \\ \Phi_Q = mg \\ \sin\theta = \frac{mg}{4kl} = \lambda < 1 \\ \Phi_{Px} = -\Phi_{Px}^i = -2kl \sqrt{1-\lambda^2} \\ \Phi_{Py} = -\Phi_{Py}^i = 0 \\ \Phi_{Ox} = 0, \Phi_{Oy} = mg \end{cases}$$

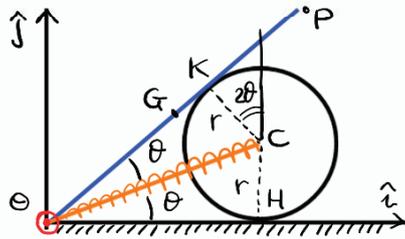
oppure  $\begin{cases} \theta = \pm \pi/2 \quad (\lambda = 1) \\ \Phi_{Px} = \Phi_{Px}^i = 0 \\ \Phi_{Py} = -\Phi_{Py}^i = \Phi_Q - mg \\ \Phi_{Ox} = 0 \\ \Phi_{Oy} = 2mg - \Phi_Q \\ \Phi_Q \in \mathbb{R} \text{ arbitrario} \end{cases}$   $\theta \equiv \alpha$

OSS: sistema articolato complessivo  $\Rightarrow \mathcal{F}^{(est)} = \{(\theta, \vec{F}_\theta), (H, \vec{F}_H), (K, \vec{F}_K), (Q, \vec{F}_Q)\}$

ECS:  $\vec{0} = \vec{R}^{(est)} = \vec{F}_\theta - mg\hat{j} - mg\hat{j} + \Phi_Q\hat{j} \Rightarrow \Phi_{Ox} = 0, \Phi_{Oy} + \Phi_Q = 2mg$

$\vec{0} = \vec{M}_\theta^{(est)} = \vec{OH} \wedge \vec{F}_H + \vec{OK} \wedge \vec{F}_K + \vec{OQ} \wedge \vec{F}_Q = [-\frac{l}{2} \cos\theta mg - \frac{3}{2}l \cos\theta mg + 2l \cos\theta \Phi_Q] \hat{k}$   
 $= 2l[\Phi_Q - mg] \cos\theta \hat{k} \Rightarrow \Phi_Q = mg$  oppure  $\theta = \pm \pi/2$

Esercizio: Studiare la statica del sistema rappresentato in figura.



Disco uniforme di massa M e raggio r (centro = baricentro = C)  
 OP = asta uniforme di massa m e lunghezza l (pt. medio = baricentro = G)  
 O = cerniera fissa, K = appoggio liscio, H = puro rotolamento  
 OC = molla ideale di costante elastica k

Conteggio qdl:  $\left. \begin{array}{l} OP \rightarrow 2+1 \\ \text{disco} \rightarrow 2+1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \theta \rightarrow -2 \\ K \rightarrow -1 \\ H \rightarrow -1-1 \end{array} \Rightarrow$  1! qdl, coordinata libera  $\theta = H\hat{O}C \in [0, \pi/4]$

Equilibrio sistema articolato  $\Leftrightarrow$  equilibrio singole componenti rigide  $\Leftrightarrow$  ECS

• Sistema OP:  $\mathcal{F}_1 = \{(\theta, \vec{F}_\theta + \vec{F}_\theta), (G, \vec{F}_G), (K, \vec{F}_K)\}$

ECS<sub>1</sub>:  $\vec{0} = \vec{R}^{(1)} = \vec{F}_\theta + k\left(\frac{r}{\tan\theta}\hat{i} + r\hat{j}\right) - mg\hat{j} + \Phi_K(-\sin 2\theta\hat{i} + \cos 2\theta\hat{j}) = (\Phi_{Ox} + \frac{kr}{\tan\theta} - \Phi_K \sin 2\theta)\hat{i} + (\Phi_{Oy} + kr - mg + \Phi_K \cos 2\theta)\hat{j}$   
 $\vec{0} = \vec{M}_\theta^{(1)} = \vec{OG} \wedge \vec{F}_G + \vec{OK} \wedge \vec{F}_K = [-\frac{l}{2} \cos 2\theta mg + \frac{r}{\tan\theta} \Phi_K] \hat{k}$   $\Rightarrow$  3 eq. in 4 incognite  $\Phi_{Ox}, \Phi_{Oy}, \Phi_K, \theta$

• Sistema disco:  $\mathcal{F}_2 = \{(K, \vec{F}_K), (C, \vec{F}_G + \vec{F}_e), (H, \vec{F}_H)\}$

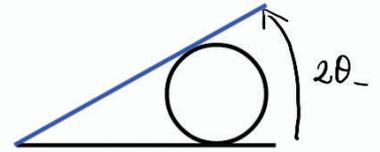
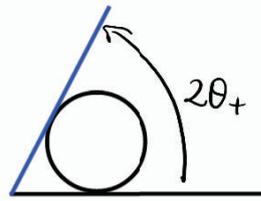
ECS<sub>2</sub>:  $\vec{0} = \vec{R}^{(2)} = -\Phi_K(-\sin 2\theta\hat{i} + \cos 2\theta\hat{j}) - Mg\hat{j} - k\left(\frac{r}{\tan\theta}\hat{i} + r\hat{j}\right) + \vec{F}_H$   
 $= (\Phi_K \sin 2\theta - \frac{kr}{\tan\theta} + \Phi_{Hx})\hat{i} + (-\Phi_K \cos 2\theta - Mg - kr + \Phi_{Hy})\hat{j} \Rightarrow \Phi_K, \Phi_{Hx}, \Phi_{Hy}, \theta$  3 eq. in 4 incognite  
 $\vec{0} = \vec{M}_H^{(2)} = \vec{HC} \wedge (\vec{F}_G + \vec{F}_e) + \vec{HK} \wedge \vec{F}_K$   
 $= (r\hat{j}) \wedge (-\frac{kr}{\tan\theta}\hat{i} - kr\hat{j}) + (r\hat{j} - r\sin 2\theta\hat{i} + r\cos 2\theta\hat{j}) \wedge (-\Phi_K)(-\sin 2\theta\hat{i} + \cos 2\theta\hat{j})$   
 $= \left[\frac{kr^2}{\tan\theta} - r\Phi_K(1 + \cos 2\theta) \sin 2\theta + r\Phi_K \sin 2\theta \cos 2\theta\right] \hat{k} = r\left[\frac{kr}{\tan\theta} - \Phi_K \sin 2\theta\right] \hat{k}$

Ricapitolando, 6 eq. in 6 incognite

$$\begin{cases} \Phi_{Ox} - \Phi_K \sin 2\theta + \frac{kr}{\tan\theta} = 0 \\ \Phi_{Oy} + \Phi_K \cos 2\theta + kr - mg = 0 \\ \Phi_{Hx} + \Phi_K \sin 2\theta - \frac{kr}{\tan\theta} = 0 \\ \Phi_{Hy} - \Phi_K \cos 2\theta - kr - Mg = 0 \\ \frac{r}{\tan\theta} \Phi_K - \frac{1}{2} mlg \cos 2\theta = 0 \\ \frac{kr}{\tan\theta} - \Phi_K \sin 2\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_{Ox} + \Phi_{Hx} = 0 \\ \Phi_{Oy} + \Phi_{Hy} = (m+M)g \\ \Phi_{Ox} = \Phi_K \sin 2\theta - \frac{kr}{\tan\theta} \\ \Phi_{Oy} = mg - kr - \Phi_K \cos 2\theta \\ \Phi_K = \frac{kr}{\tan\theta \sin 2\theta} \\ \tan^2 \theta \sin 2\theta \cos 2\theta = \frac{2kr^2}{mlg} = \lambda \end{cases}$$

$f(\theta) \uparrow$   $\theta_M \sim 0.6$   $f(\theta_M) \sim 0.16$   
 $\Rightarrow \exists \theta_{\pm} \in [0, \pi/4]$  t.c.  $f(\theta_{\pm}) = \lambda$  se e solo se  $\lambda \leq f(\theta_M)$

$$\begin{aligned} \phi_{0x} &= -\phi_{Hx} = 0 \\ \phi_{0y} &= mg - kr \left[ 1 + \frac{\cos 2\theta}{\tan \theta \sin 2\theta} \right] = mg - \frac{kr}{2 \sin^2 \theta_{\pm}} \\ \phi_{Hy} &= (m+M)g - \phi_{0y} = Mg + \frac{kr}{2 \sin^2 \theta_{\pm}} \\ \phi_k &= \frac{kr}{\tan \theta \sin 2\theta} \end{aligned}$$



NB: per avere contatto tra asta e disco in K deve essere soddisfatta la condizione  $l > \frac{r}{\tan \theta_{\pm}} \leftrightarrow \theta_{\pm} > \arctan \frac{r}{l}$ . Questa può essere verificata da  $\theta_+$  e  $\theta_-$ , oppure solo da  $\theta_+$ , oppure da nessuna delle due.

### 4.3) Principio dei lavori virtuali

Ricordiamo alcune definizioni preliminari

Def: Si consideri il moto di un punto materiale lungo una curva regolare  $\gamma$ . Il lavoro svolto da una forza  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}; t)$  che agisce sul punto e la potenza associata sono

$$L = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad \Pi = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

OSS:  $L = \int_{t_0}^t \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt'} dt' = \int_{t_0}^t \vec{F} \cdot \vec{v} dt' = \int_{t_0}^t \Pi dt' \leftrightarrow \Pi = \frac{dL}{dt}$  (teo fondamentale calcolo integrale)

OSS:  $L$  è una grandezza globale  
 $\Pi = \Pi(t)$  è una grandezza istantanea }  $\rightarrow dL = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \Pi dt =$  lavoro infinitesimo.

Def: Dato un sistema di punti materiali  $\{P_i\}_{i=1, \dots, N}$  soggetto a vincoli, si dice adm virtuale una famiglia  $A = \{(\vec{P}_i, \vec{v}_i)\}_{i=1, \dots, N} \subset E^3 \times \mathbb{R}^3$  compatibile con i vincoli.

Si chiama velocità virtuale uno qualsiasi dei vettori  $\vec{v}_i$  che compaiono in  $A$ .

Dato un intervallo di tempo infinitesimo  $\delta t \in \mathbb{R}$ , si chiama spostamento virtuale

$$\delta \vec{P}_i = \vec{v}_i \delta t \in \mathbb{R}^3 \quad i = 1, \dots, N.$$

Uno spostamento virtuale è detto reversibile se anche il suo opposto  $-\delta \vec{P}_i$  è uno spostamento virtuale ammissibile (compatibile con i vincoli).

OSS:  $\vec{v}_i$  e  $\delta \vec{P}_i$  dipendono da  $P_i$

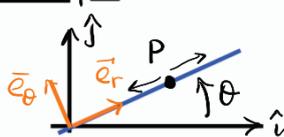
OSS: in generale: spostamenti virtuali  $\neq$  spostamenti reali infinitesimi

$\hookrightarrow$  identificazione solo nel caso di vincoli fissi.

In un sistema olonomo con  $\# \text{gd} = g$ , descritto con coord generalizzate  $(q_1, \dots, q_g)$  si ha

$$P_i = P_i(q_1, \dots, q_g) \begin{cases} dP_i = \sum_{j=1}^g \frac{\partial P_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt = \text{spostamento reale} \\ \delta P_i = \sum_{j=1}^g \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \delta q_j = \text{spostamento virtuale} \end{cases}$$

Esempio: Punto materiale vincolato a guida rettilinea rotante



$$\vec{x}_P(t) = r(t) \vec{e}_r(t)$$

velocità virtuali:  $\vec{v}_P = v \vec{e}_r \rightarrow \delta \vec{P} = v \delta t \vec{e}_r = \delta r \vec{e}_r$

velocità reali:  $\dot{\vec{x}}_P = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \rightarrow dP = \dot{r} dt \vec{e}_r + r \dot{\theta} dt \vec{e}_\theta = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$

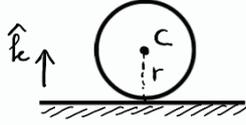
OSS: in generale,  $\# \text{gd} < dN$  ( $d = 1, 2, 3$ ) in presenza di vincoli

$\Rightarrow$  spostamenti virtuali  $\delta \vec{P}_i$  non tutti linearmente indipendenti.

OSS: vincoli bilateri  $\leftrightarrow \forall \delta \vec{P}_i$  spostamento virtuale è reversibile

vincoli unilateri  $\leftrightarrow \exists \delta \vec{P}_i$  spostamento virtuale non reversibile

Esempio: Disco rigido, di centro  $C$  e raggio  $r$ , appoggiato ad un piano orizzontale  $\pi$



Viucolo di impenetrabilit   $\Rightarrow \text{dist}(C, \pi) \geq r \Rightarrow F(C) = \text{dist}(C, \pi) - r \geq 0$   
 $\Rightarrow \delta \bar{C} = \delta z \hat{k}$    spostamento virtuale se e solo se  $\delta z > 0$   
 $\Rightarrow -\delta \bar{C} = (-\delta z) \hat{k}$  non   spostamento virtuale.

Def: Dato un sistema di punti materiali  $\{P_i\}_{i=1, \dots, N}$  soggetto ad un sistema di forze  $\mathcal{F} = \{(P_i, \vec{F}_i)\}_{i=1, \dots, N}$ , il lavoro virtuale e la potenza virtuale associati agli spostamenti virtuali  $\{\delta \bar{P}_i\}_{i=1, \dots, N}$  e alle velocit  virtuali  $\{\vec{v}_i'\}_{i=1, \dots, N}$  sono

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \bar{P}_i \quad \pi' = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i'$$

Esempio: Lavoro virtuale svolto da una coppia di forze applicate ad un corpo rigido  $\mathcal{C}$

Teo Rivals  $\Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge \vec{QP} \quad \forall P, Q \in \mathcal{C} \Rightarrow \delta \bar{P} = \delta \bar{Q} + \delta \bar{\theta} \wedge \vec{QP}$  con  $\delta \bar{\theta} = \vec{\omega} \delta t$

$$\mathcal{F} = \{(P, \vec{F}), (Q, -\vec{F})\} \Rightarrow \delta L = \vec{F} \cdot \delta \bar{P} + (-\vec{F}) \cdot \delta \bar{Q} = \vec{F} \cdot (\delta \bar{P} - \delta \bar{Q}) = \vec{F} \cdot (\delta \bar{\theta} \wedge \vec{QP}) = \delta \bar{\theta} \cdot (\vec{QP} \wedge \vec{F}) = \delta \bar{\theta} \cdot \vec{M}_Q$$

Def: I viucoli a cui   sottoposto un sistema di punti materiali  $\{P_i\}_{i=1, \dots, N}$  sono detti viucoli ideali (lisci, non-dissipativi) se sono capaci di esercitare tutte e sole le reazioni  $\vec{\Phi}_i$  t.c.

$$\delta L^{(v)} := \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i \cdot \delta \bar{P}_i \geq 0 \quad \forall \delta \bar{P}_i \text{ spostamento virtuale}$$

$$(\Leftrightarrow) \pi'^{(v)} := \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i \cdot \vec{v}_i' \geq 0 \quad \forall \vec{v}_i' \text{ velocit  virtuale}$$

Oss: viucoli "lisci" non significa necessariamente "privi di attrito".

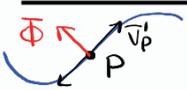
(Es: puro rotolamento   un viucolo ideale e l'attrito   necessario per impedire slittamento)

Oss: un viucolo bilatero   ideale (e in tal caso   detto perfetto) se e solo se  $\delta L^{(v)} = 0$

(Infatti: bilatero  $\Leftrightarrow \forall \delta \bar{P}_i$    reversibile  $\Leftrightarrow \delta \bar{P}_i, -\delta \bar{P}_i$  spostamenti virtuali ammissibili)  
 $\Leftrightarrow 0 \leq \vec{\Phi}_i \cdot \delta \bar{P}_i = -\vec{\Phi}_i \cdot (-\delta \bar{P}_i) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \delta L^{(v)} \leq 0 \Rightarrow \delta L^{(v)} = 0$

### Esempi

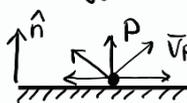
(1) Guida ideale: punto materiale vincolato a muoversi lungo una curva senza attrito.



velocit  virtuale  $\vec{v}_P' \parallel \vec{T} \Rightarrow$  spostamento virtuale  $\delta \bar{P} = \delta s \vec{T}$  ( $\delta s \in \mathbb{R} \rightarrow$  reversibile)

Viucolo ideale (perfetto)  $\Leftrightarrow 0 = \delta L^{(v)} = \vec{\Phi} \cdot \delta \bar{P} = (\vec{\Phi} \cdot \vec{T}) \delta s \quad \forall \delta s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\Phi} \perp \vec{T}}$

(2) Appoggio ideale: punto materiale appoggiato ad un piano  $\pi \perp \hat{n}$  ( $\hat{n}$  = versore normale)



Velocit  virtuale:  $\vec{v}_P' = \vec{v}_{P\perp}' + \vec{v}_{P\parallel}'$  con  $\vec{v}_{P\perp}' = v_\perp' \hat{n}$ ,  $v_\perp' \geq 0$ ,  $\vec{v}_{P\parallel}' \perp \hat{n}$

$\Rightarrow$  spostamento virtuale  $\delta \bar{P} = \delta h \hat{n} + \delta \bar{P}_\parallel$  con  $\delta h \geq 0$ ,  $\delta \bar{P}_\parallel \perp \hat{n}$  ( $\delta \bar{P}_\parallel$  reversibile)

Viucolo unilatero ideale  $\Leftrightarrow 0 \leq \delta L^{(v)} = \vec{\Phi} \cdot \delta \bar{P} = (\vec{\Phi} \cdot \hat{n}) \delta h + (\vec{\Phi} \cdot \delta \bar{P}_\parallel) \quad \forall \delta h \in \mathbb{R}_+, \delta \bar{P}_\parallel \perp \hat{n}$

$$\delta \bar{P} = \delta h \hat{n} \quad (\delta \bar{P}_\parallel = \vec{0}) \Rightarrow 0 \leq (\vec{\Phi} \cdot \hat{n}) \delta h \quad \forall \delta h \geq 0 \Leftrightarrow \Phi_\perp = \vec{\Phi} \cdot \hat{n} \geq 0$$

$$\delta \bar{P} = \delta \bar{P}_\parallel \quad (\delta h = 0) \Rightarrow 0 \leq \vec{\Phi} \cdot \delta \bar{P}_\parallel = -\vec{\Phi} \cdot (-\delta \bar{P}_\parallel) \leq 0 \quad \forall \delta \bar{P}_\parallel \perp \hat{n} \Leftrightarrow \Phi_\parallel = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \Phi_\perp = \vec{\Phi} \cdot \hat{n} \\ \Phi_\parallel \geq 0 \end{matrix}}$$

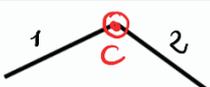
(3) Cerniera fissa: velocità virtuale  $\vec{v}_C' = \vec{0} \Rightarrow \delta \bar{C} = \vec{0}$



$\Rightarrow \delta \bar{P} = \delta \vec{C} + \delta \bar{\theta} \wedge \vec{CP} = \delta \bar{\theta} \wedge \vec{CP} \quad \forall P \in \mathcal{C}$ ,  $\delta \bar{\theta} = \vec{\omega}' \delta t \in \mathbb{R}^3$  (reversibile)

Viucolo ideale (perfetto)  $\Leftrightarrow 0 = \delta L^{(v)} = \vec{\Phi} \cdot \delta \bar{C} \rightarrow \forall \vec{\Phi} \in \mathbb{R}^3$  non compie lavoro perché C   fermo.

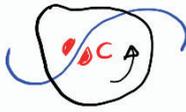
(4) Cerniera mobile: velocità virtuale  $\vec{v}_C' \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \delta \bar{C} \in \mathbb{R}^3$  (reversibile)



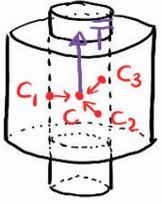
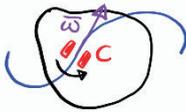
Viucolo ideale (perfetto)  $\Leftrightarrow 0 = \delta L^{(v)} = \vec{\Phi} \cdot \delta \bar{C} = (\vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2) \cdot \delta \bar{C} \quad \forall \delta \bar{C} \in \mathbb{R}^3$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{\Phi}_1 = -\vec{\Phi}_2}$$

(5) Carrello:  $\vec{v}_c = v_c \vec{T}$  con  $v_c \in \mathbb{R} \Rightarrow \delta \vec{c} = \delta s \vec{T}$  ( $\delta s \in \mathbb{R}$ , reversibile)  
 $\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{\omega}' \wedge \vec{c} \vec{P}$  con  $\vec{\omega}' \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \delta \vec{p} = \delta \vec{c} + \delta \vec{\theta}' \wedge \vec{c} \vec{P}$  ( $\delta \vec{\theta}' \in \mathbb{R}^3$ , reversibile)  
 Vincolo ideale (perfetto)  $\Leftrightarrow 0 = \delta L^{(v)} = \vec{\Phi}_c \cdot \delta \vec{c} = (\vec{\Phi}_c \cdot \vec{T}) \delta s \quad \forall \delta s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\Phi}_c \perp \vec{T}}$



(6) Manicotto:  $\vec{v}_c = v_c \vec{T}$  con  $v_c \in \mathbb{R} \Rightarrow \delta \vec{c} = \delta s \vec{T}$  ( $\delta s \in \mathbb{R}$ , reversibile)  
 $\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{\omega}' \wedge \vec{c} \vec{P}$  con  $\vec{\omega}' = \omega' \vec{T}$ ,  $\omega' \in \mathbb{R} \Rightarrow \delta \vec{p} = \delta \vec{c} + \delta \theta \vec{T} \wedge \vec{c} \vec{P}$  ( $\delta \theta \in \mathbb{R}$ , reversibile)  
 Descrizione più realistica con appoggi ideali in 3 punti  
 $C_1, C_2, C_3 \in$  piano  $\perp \vec{T}$ , normale per  $C \rightarrow$  reazioni vincolari  $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, \vec{\Phi}_3 \perp \vec{T}$   
 $\Rightarrow \delta L^{(v)} = \sum_i \vec{\Phi}_i \cdot \delta \vec{c}_i = \sum_i \vec{\Phi}_i \cdot (\delta \vec{c} + \delta \theta \vec{T} \wedge \vec{c} \vec{c}_i) = (\sum_i \vec{\Phi}_i) \cdot \delta \vec{c} + (\sum_i \vec{c} \vec{c}_i \wedge \vec{\Phi}_i) \cdot \vec{T} \delta \theta$   
 $= \vec{\Phi}_c \cdot \vec{T} \delta s + \vec{M}_c \cdot \vec{T} \delta \theta$



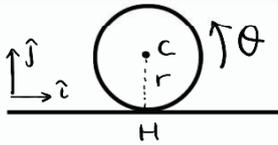
Vincolo ideale (perfetto)  $\Leftrightarrow \delta L^{(v)} \geq 0 \quad \forall \delta s, \delta \theta \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} \delta s \neq 0 \ (\delta \theta = 0) \Rightarrow \vec{\Phi}_c \cdot \vec{T} = 0 \\ (\delta s = 0) \ \delta \theta \neq 0 \Rightarrow \vec{M}_c \cdot \vec{T} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\vec{\Phi}_c \perp \vec{T} \text{ e } \vec{M}_c \perp \vec{T}}$$

(6a) Pattino: manicotto con  $\vec{\omega}' = \vec{0} \Rightarrow \delta \theta = 0 \Rightarrow \vec{\Phi}_c \perp \vec{T}$  e  $\vec{M}_c \in \mathbb{R}^3$

(6b) Incastro: pattino con  $\vec{v}_c = \vec{0} \Rightarrow \delta s = 0 \Rightarrow \vec{\Phi}_c \in \mathbb{R}^3$  e  $\vec{M}_c \in \mathbb{R}^3$

(7) Puro rotolamento: Vincolo di appoggio:  $\delta \vec{H} = \delta h \hat{j}$  con  $\delta h \geq 0$   
 Vincolo ideale:  $0 \leq \delta L^{(v)} = \vec{\Phi}_H \cdot \delta \vec{H} = (\vec{\Phi}_H \cdot \hat{j}) \delta h \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Phi_{\perp} = \vec{\Phi}_H \cdot \hat{j} \geq 0 \\ \vec{\Phi}_H = \Phi_{\perp} \hat{j} + \Phi_{\parallel} \hat{i} \\ \text{con } \Phi_{\perp} \geq 0, \Phi_{\parallel} \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$   
 Puro rotolamento:  $\vec{v}_H = \vec{0} \rightarrow \delta \vec{H} = \vec{0}$  unico spostamento virtuale ammesso  
 $\Rightarrow \delta \vec{c} = \delta \vec{H} + \delta \theta \hat{k} \wedge \vec{H} \vec{C} = \delta \theta \hat{k} \wedge r \hat{j} = -r \delta \theta \hat{i} = \delta s \hat{i}$  con  $\delta s = -r \delta \theta \in \mathbb{R}$  (reversibile)  
 $\Rightarrow \delta L^{(v)} = \vec{\Phi}_H \cdot \delta \vec{H} = \vec{0} \Rightarrow$  vincolo ideale.



### Teorema (Principio dei lavori virtuali - Bernoulli, d'Alambert, Lagrange)

Dato un sistema di punti materiali  $\{P_i\}_{i=1, \dots, N}$  sottoposto a vincoli ideali e ad un sistema di forze attive  $\vec{F}_i = \{ \vec{F}_i^{(A)} = \vec{F}_i^{(int)} + \vec{F}_i^{(ext)} \}_{i=1, \dots, N}$ , condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione  $\{P_i(t_0)\}_{i=1, \dots, N}$  sia di equilibrio è che

$$\boxed{\delta L^{(A)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(A)} \cdot \delta \vec{P}_i \leq 0 \quad \forall \{ \delta \vec{P}_i = \text{spostamento virtuale} \}_{i=1, \dots, N}}$$

$$(\Leftrightarrow \Pi^{(A)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(A)} \cdot \vec{v}_i \leq 0 \quad \forall \{ \vec{v}_i = \text{velocità virtuale} \}_{i=1, \dots, N})$$

OSS: Nell' enunciato  $\vec{F}_i^{(A)} = \vec{F}_i^{(A)}(P_i(t_0), \vec{0}, \dots, (P_i(t_0), \vec{0}))$ ,  $\delta \vec{P}_i =$  spostamento virtuale in  $P_i(t_0)$ .

OSS: Nel caso di vincoli bilateri ideali (perfetti):  $\delta L^{(A)} = 0 \quad \forall \{ \delta \vec{P}_i \}_{i=1, \dots, N}$ .

OSS:  $\delta L^{(A)} \leq 0$  è detta "relazione pura della statica" perché non dipende esplicitamente dalle relazioni vincolari

$\rightarrow$  NB: resta la dipendenza implicita dai vincoli nelle scelte ammissibili di  $\delta \vec{P}_i$ .

OSS:  $\delta L^{(A)} \leq 0$  è un'unica eq. scalare, ma variando  $\delta \vec{P}_i$  si ottengono molte equazioni.

dim: Siano  $L = \{ \text{punti liberi} \}$ ,  $D = \{ \text{punti vincolati} \}$

cond. necessaria: equilibrio  $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_i = \vec{0} \quad \forall i \in L \\ \vec{F}_i + \vec{\Phi}_i = \vec{0} \quad \forall i \in D \end{array} \right. \Rightarrow \delta L^{(A)} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{P}_i = \sum_{i \in L} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{P}_i + \sum_{i \in D} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{P}_i = - \sum_{i \in D} \vec{\Phi}_i \cdot \delta \vec{P}_i \leq 0$   
 $\uparrow$  vincoli ideali

cond. sufficiente:  $0 \geq \delta L^{(A)} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{P}_i = \sum_{i \in L} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{P}_i + \sum_{i \in D} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{P}_i \quad \forall \{ \delta \vec{P}_i \}$

• consideriamo  $\delta \vec{P}_i = \vec{0} \quad \forall i$  tranne  $\delta \vec{P}_e \in \mathbb{R}^3$  arbitrario per un  $e \in L$ . Tenendo presente che  $\delta \vec{P}_e$  è reversibile per costruzione, segue che

$$0 \geq \delta L^{(A)} = \vec{F}_e \cdot \delta \vec{P}_e \quad \text{e} \quad 0 \geq \delta L^{(A)} = \vec{F}_e \cdot (-\delta \vec{P}_e) \Rightarrow \vec{F}_e \cdot \delta \vec{P}_e = 0 \quad \forall \delta \vec{P}_e \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{F}_e = \vec{0}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento al variare di  $l \in L$ , si ottiene  $\bar{F}_e = \bar{0} \quad \forall l \in L$ , da cui segue che  $P_e$  è in equilibrio  $\forall l \in L$  e  $\sum_{e \in L} \bar{F}_e \cdot \delta \bar{P}_e = 0$ .

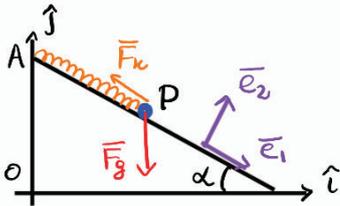
• Poniamo  $\bar{\Phi}_i^* := -\bar{F}_i =$  forza che deve essere esercitata su  $P_i$  dai vincoli per avere equilibrio

$$\Rightarrow 0 \geq \delta L^{(A)} = \sum_{i \in V} \bar{F}_i \cdot \delta \bar{P}_i = - \sum_{i \in V} \bar{\Phi}_i^* \cdot \delta \bar{P}_i \quad \forall \{\delta \bar{P}_i\} \Rightarrow \sum_{i \in V} \bar{\Phi}_i^* \cdot \delta \bar{P}_i \geq 0 \quad \forall \{\delta \bar{P}_i\}$$

$\hookrightarrow$  Condizione verificata da vincoli ideali.

$$\Rightarrow \bar{\Phi}_i = \bar{\Phi}_i^* \text{ t.c. } \bar{F}_i + \bar{\Phi}_i = \bar{0} \quad \forall i \in V \Rightarrow P_i \text{ in equilibrio } \forall i \in V.$$

Esempio: Determinare le configurazioni di equilibrio per un punto materiale di massa  $m$  appoggiato su un piano liscio (no attrito radente) inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo  $\alpha$ , soggetto a forze peso e collegato tramite molla ideale ad un punto fisso.



$$\begin{cases} \bar{e}_1 = \cos \alpha \hat{i} - \sin \alpha \hat{j} \\ \bar{e}_2 = \sin \alpha \hat{i} + \cos \alpha \hat{j} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \hat{i} = \cos \alpha \bar{e}_1 + \sin \alpha \bar{e}_2 \\ \hat{j} = -\sin \alpha \bar{e}_1 + \cos \alpha \bar{e}_2 \end{cases} \quad \alpha \in [0, \pi/2]$$

Forze attive:  $\mathcal{F}^{(A)} = \{(P, \bar{F}_g + \bar{F}_k)\}$ ,  $\bar{F}_g = -mg \hat{j}$ ,  $\bar{F}_k = k \overline{PA} = -ks \bar{e}_1$

Spostamenti virtuali:  $\delta \bar{P} = \delta s \bar{e}_1 + \delta h \bar{e}_2$  con  $\delta s \in \mathbb{R}$ ,  $\delta h \geq 0$ .

$$\text{PLV: } 0 \geq \delta L^{(A)} = (\bar{F}_g + \bar{F}_k) \cdot \delta \bar{P} = (-mg \hat{j} - ks \bar{e}_1) \cdot (\delta s \bar{e}_1 + \delta h \bar{e}_2) = [mg \sin \alpha - ks] \delta s + [-mg \cos \alpha] \delta h$$

$$\left. \begin{aligned} \delta s \in \mathbb{R}, \delta h = 0 &\Rightarrow mg \sin \alpha - ks = 0 \Rightarrow s_{eq} = \frac{mg}{k} \sin \alpha \\ \delta s = 0, \delta h > 0 &\Rightarrow -mg \cos \alpha \leq 0 \rightarrow \text{sempre verificata} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{AP}_{eq} = \frac{mg}{k} \sin \alpha \bar{e}_1$$

### ▷ PLV per corpi rigidi

Nel caso di un corpo rigido, segue dal teorema di Rivolt che  $\delta \bar{P} = \delta \bar{Q} + \delta \bar{\theta} \wedge \overline{QP} \quad \forall P, Q \in \mathcal{C}$

Proposizione: Dato un corpo rigido, il lavoro virtuale svolto da un sistema di forze con risultanti  $\bar{R}, \bar{M}_O$  è dato da

$$\delta L = \bar{R} \cdot \delta \bar{O} + \bar{M}_O \cdot \delta \bar{\theta} \quad \forall \delta \in \mathcal{E}$$

$$\text{dim: } \delta L = \sum_i \bar{F}_i \cdot \delta \bar{P}_i = \sum_i \bar{F}_i \cdot (\delta \bar{O} + \delta \bar{\theta} \wedge \overline{OP}_i) = (\sum_i \bar{F}_i) \cdot \delta \bar{O} + \delta \bar{\theta} \cdot (\sum_i \overline{OP}_i \wedge \bar{F}_i) = \bar{R} \cdot \delta \bar{O} + \delta \bar{\theta} \cdot \bar{M}_O \quad \square$$

Teorema: Le ECS sono condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido soggetto a vincoli ideali:

$$\bar{R}^{(est)} = \bar{0}, \bar{M}_O^{(est)} = \bar{0} \Leftrightarrow \text{equilibrio}$$

oss: Al fine di studiare la statica di un unico corpo rigido è sempre possibile sostituire un dato sistema di forze con un altro ad esso equivalente.

dim: Equilibrio  $\Rightarrow$  ECS: già visto.

Equilibrio  $\Leftarrow$  ECS: Forze interne bilanciate per ipotesi  $[H_1]$ :  $\bar{R}^{(int)} = \bar{0}, \bar{M}_O^{(int)} = \bar{0}$

$$\Rightarrow \delta L^{(tot)} = \delta L^{(est)} + \delta L^{(int)} = (\bar{R}^{(est)} \cdot \delta \bar{O} + \bar{M}_O^{(est)} \cdot \delta \bar{\theta}) + (\bar{R}^{(int)} \cdot \delta \bar{O} + \bar{M}_O^{(int)} \cdot \delta \bar{\theta}) = 0 \Rightarrow \delta L^{(A)} \leq 0$$

$$= \delta L^{(A)} + \delta L^{(V)} \geq \delta L^{(A)} \quad (\text{vincoli ideali} \Rightarrow \delta L^{(V)} \geq 0) \quad \downarrow \text{PLV} \quad \text{equilibrio} \quad \square$$

Esempi: • cerniera fissa:  $\delta \bar{C} = \bar{0}$ ,  $\mathcal{F}^{(A)} = \{(G, \bar{F}_g)\} \Rightarrow \bar{R}^{(A)} = -mg \hat{k}, \bar{M}_C^{(A)} = \overline{CG} \wedge \bar{F}_g = \bar{M}_C^{(est)}$

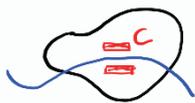


$$\text{PLV: equilibrio} \Leftrightarrow 0 = \delta L^{(A)} = \bar{R}^{(A)} \cdot \delta \bar{C} + \bar{M}_C^{(A)} \cdot \delta \bar{\theta} \Leftrightarrow \bar{M}_C^{(A)} \cdot \delta \bar{\theta} = 0 \quad \forall \delta \bar{\theta} \in \mathbb{R}^3$$

$$\Leftrightarrow \bar{0} = \bar{M}_C^{(A)} = \overline{CG} \wedge (-mg \hat{k}) \Leftrightarrow \overline{CG} \parallel \hat{k}$$

$$\Leftrightarrow G \in \text{asse verticale passante per } C$$

• manico:  $\delta \bar{C} = \delta s \bar{T}, \delta \bar{\theta} = \delta \theta \bar{T} \quad (\delta s, \delta \theta \in \mathbb{R})$



$$\text{PLV: equilibrio} \Leftrightarrow 0 = \delta L^{(A)} = \bar{R}^{(A)} \cdot \delta \bar{C} + \bar{M}_C^{(A)} \cdot \delta \bar{\theta} = \bar{R}^{(A)} \cdot \bar{T} \delta s + \bar{M}_C^{(A)} \cdot \bar{T} \delta \theta$$

$$\left. \begin{aligned} \delta s \neq 0, \delta \theta = 0 &\Rightarrow \bar{R}^{(A)} \cdot \bar{T} = 0 \\ \delta s = 0, \delta \theta \neq 0 &\Rightarrow \bar{M}_C^{(A)} \cdot \bar{T} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{R}^{(A)}, \bar{M}_C^{(A)} \perp \bar{T}$$

► PLV per sistemi olonomi bilateri

[H<sub>2</sub>] Consideriamo un sistema di punti materiali  $\{P_i\}_{i=1, \dots, N}$  soggetto a vincoli fissi, olonomi, bilateri e ideali (perfetti) e sia  $\{q_k\}_{k=1, \dots, g}$  un sistema di coordinate generalizzate.

$$P_i = P_i(q_1, \dots, q_g) \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Lemma: Siamo verificata le ipotesi [H<sub>2</sub>]. Allora, fissato un sistema di riferimento, gli spostamenti virtuali e il lavoro virtuale sono dati da

$$\delta \bar{P}_i = \sum_{k=1}^g \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad \text{con } \delta q_k \in \mathbb{R} \text{ spostamenti virtuali generalizzati (indipendenti)}$$

$$\delta L = \sum_{k=1}^g Q_k \delta q_k \quad \text{con } Q_k := \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial q_k} = \text{componente } k\text{-esima delle forze generalizzate}$$

dim: Sviluppo di Taylor:  $\delta \bar{P}_i(\bar{q}) = P_i(\bar{q} + \delta \bar{q}) - P_i(\bar{q}) = \bar{O}P_i(\bar{q} + \delta \bar{q}) - \bar{O}P_i(\bar{q}) = \sum_k \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k} \delta q_k + \mathcal{O}(|\delta \bar{q}|^2)$

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \delta \bar{P}_i = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \left( \sum_{k=1}^g \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{k=1}^g \left( \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k$$

Teorema: Dato un sistema meccanico che soddisfi le ipotesi [H<sub>2</sub>] e sia sottoposto ad un sistema di forze attive  $\mathcal{F}^{(A)} = \{(P_i, \bar{F}_i^{(A)})\}_{i=1, \dots, N}$ , condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è

$$Q_k^{(A)} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, g$$

OSS: Configurazione d'equilibrio  $\{P_i(0)\}_{i=1, \dots, N} \leftrightarrow \{q_k(0)\}_{k=1, \dots, g} = \bar{q}(0)$  t.c.  $P_i(0) \equiv P_i(\bar{q}(0))$ .

↳ Nell'enunciato si intende  $Q_k^{(A)} = Q_k^{(A)}(P_i(0)) \equiv Q_k^{(A)}(P_i(\bar{q}(0))) \equiv Q_k^{(A)}(\bar{q}(0)) = 0$ .

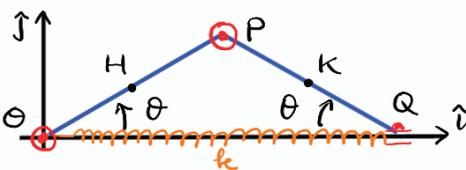
OSS: equilibrio  $\leftrightarrow$  g eq. pze (non coinvolgono reazioni vincolari)

$$Q_k^{(A)}(\bar{q}) = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i^{(A)}(\bar{q}) \cdot \frac{\partial \bar{O}P_i(\bar{q})}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, \dots, g.$$

dim: PLV + [H<sub>2</sub>]  $\Rightarrow 0 = \delta L^{(A)} = \sum_{k=1}^g Q_k^{(A)} \delta q_k \quad \forall \delta \bar{q} = (\delta q_1, \dots, \delta q_g)$

Scegliendo  $\delta \bar{q} = (0, \dots, 0, \delta q_k \neq 0, 0, \dots, 0) \Rightarrow 0 = \delta L^{(A)} = Q_k \delta q_k \Rightarrow Q_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, g$

Esercizio: Studiare la statica del sistema rappresentato in figura



OP, PQ = aste rigide di lunghezza  $l$  e massa  $m$ ;  
 H = baricentro di OP, K = baricentro di PQ;  
 O = cerniera fissa, P = cerniera mobile, Q = carrello;  
 OQ = molla ideale di costante elastica  $k$ .

Conteggio gdl:  $\left. \begin{array}{l} OP \rightarrow 2+1 \\ PQ \rightarrow 2+1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} O \rightarrow -2 \\ P \rightarrow -2 \\ Q \rightarrow -1 \end{array} \Rightarrow 1 \text{ gdl con coord libera}$   
 $\theta = \widehat{QOP} \in [0, 2\pi)$

Sistema di forze attive:  $\mathcal{F}^{(A)} = \{(O, \bar{F}_O), (H, \bar{F}_H), (K, \bar{F}_K), (Q, \bar{F}_Q)\}$

$$\bar{O}H = \frac{l}{2}(\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) \rightarrow \delta \bar{O}H = \frac{\partial \bar{O}H}{\partial \theta} \delta \theta = \frac{l}{2}(-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}) \delta \theta, \quad \bar{F}_H = -mg \hat{j}$$

$$\bar{O}K = \frac{l}{2}(3\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) \rightarrow \delta \bar{O}K = \frac{\partial \bar{O}K}{\partial \theta} \delta \theta = \frac{l}{2}(-3\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}) \delta \theta, \quad \bar{F}_K = -mg \hat{j}$$

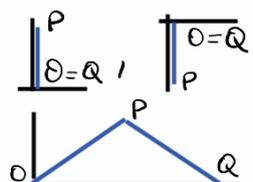
$$\bar{O}Q = 2l \cos\theta \hat{i} \rightarrow \delta \bar{O}Q = \frac{\partial \bar{O}Q}{\partial \theta} \delta \theta = -2l \sin\theta \hat{i} \delta \theta, \quad \bar{F}_Q = -\bar{F}_O = -k 2l \cos\theta \hat{i}$$

$$\text{PLV} \Rightarrow 0 = \delta L^{(A)} = \bar{F}_O \cdot \delta \bar{O} + \bar{F}_H \cdot \delta \bar{O}H + \bar{F}_K \cdot \delta \bar{O}K + \bar{F}_Q \cdot \delta \bar{O}Q = \left[ -\frac{1}{2}mg l \cos\theta - \frac{1}{2}mg l \cos\theta + 4kl^2 \sin\theta \cos\theta \right] \delta \theta$$

$$= \left[ 4kl^2 \cos\theta \left( \sin\theta - \frac{mg}{4kl} \right) \right] \delta \theta = Q_\theta \delta \theta$$

Equilibrio  $\Leftrightarrow \delta L^{(A)} = 0 \quad \forall \delta \theta \Leftrightarrow Q_\theta = 0$

$$\begin{array}{l} \cos\theta = 0 \rightarrow \theta = \pi/2 \\ \qquad \qquad \qquad \theta = -\pi/2 \\ \sin\theta = \frac{mg}{4kl} \rightarrow \theta = \arcsin \lambda \\ \qquad \qquad \qquad \lambda = \frac{mg}{4kl} < 1 \end{array}$$



## ► PLV per forze conservative

Si ricordi che una forza posizionale  $\vec{F} = \vec{F}(P)$  è detta conservativa se  $\exists U \in \mathcal{E}^1$  t.c.  
 $\vec{F} = -\nabla U$  ( $U =$  energia potenziale)

[H<sub>3</sub>] Consideriamo un sistema di punti materiali  $\{P_i\}_{i=1, \dots, N}$  in cui agiscono forze attive posizionali conservative con energia potenziale  $U \in \mathcal{E}^1$ :

$$\vec{F}_i^{(A)} = (F_{i,x}^{(A)}, F_{i,y}^{(A)}, F_{i,z}^{(A)}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i}\right) = -\nabla_{\vec{x}_i} U \quad \forall i=1, \dots, N$$

Teorema (principio di stazionarietà del potenziale) Dato un sistema meccanico che soddisfi le ipotesi [H<sub>2</sub>, H<sub>3</sub>], condizione necessaria e sufficiente affinché  $\bar{q}(0) = \{q_k(0)\}_{k=1, \dots, g}$  sia una configurazione di equilibrio è

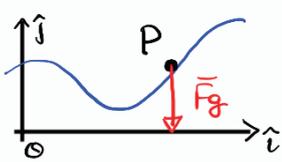
$$\nabla_{\bar{q}} U(\bar{q}(0)) = \left(\frac{\partial U}{\partial q_k}(\bar{q}(0))\right)_{k=1, \dots, g} = 0.$$

dim: Segue dal teorema precedente alle forze generalizzate che  
 equilibrio  $\Leftrightarrow 0 = Q_k^{(A)} = \sum_i \vec{F}_i^{(A)} \cdot \frac{\partial \vec{OP}_i}{\partial q_k} = \sum_i (-\nabla_{\vec{x}_i} U) \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$  (derivata funzione composta  $U(\vec{x}(q))$ )

OSS:  $Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \Rightarrow \delta L^{(A)} = \sum_k Q_k \delta q_k = -\sum_k \frac{\partial U}{\partial q_k} \delta q_k = -\delta U$

OSS: Il teorema non dice nulla sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio

Esempio: Punto materiale vincolato a guida liscia e soggetto a forze peso.



guida  $\equiv$  grafico di funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow$  # g.d.l. = 2 - 1 = 1 con  $x \in \mathbb{R}$  coord. generalizzata,  $y = f(x)$ .

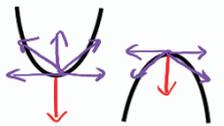
$$\vec{OP} = x\hat{i} + f(x)\hat{j} \Rightarrow \delta \vec{OP} = \frac{\partial \vec{OP}}{\partial x} \delta x = (1\hat{i} + f'(x)\hat{j}) \delta x$$

$$\vec{F}_g = -mg\hat{j} \Rightarrow U = mg(y - y_0) = mg(f(x) - f(x_0))$$

$$\delta L^{(A)} = \vec{F}_g \cdot \delta \vec{OP} = -mg f'(x) \delta x = -\delta U$$

$\hookrightarrow x_0 =$  equilibrio stabile  $\Leftrightarrow$  minimo di  $f \Leftrightarrow$  minimo di  $U \Leftrightarrow \Delta L^{(A)} \leq 0$

$x_0 =$  equilibrio instabile  $\Leftrightarrow$  massimo di  $f \Leftrightarrow$  massimo di  $U \Leftrightarrow \Delta L^{(A)} \geq 0$



Def: Una configurazione di equilibrio  $\bar{q}_0$  è detta stabile in senso statico (o energetico) se  $\exists I(\bar{q}_0) \subset \mathbb{R}^g$  intorno di  $\bar{q}_0$  t.c. il lavoro svolto dalle forze attive per spostare il sistema da  $\bar{q}_0$  in  $I(\bar{q}_0)$  è sempre negativo:

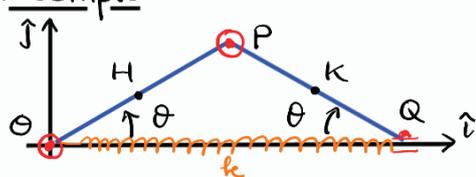
$$L(\bar{q}_0 \rightarrow \bar{q}) < 0 \quad \forall \bar{q} \in I(\bar{q}_0) \setminus \{\bar{q}_0\}.$$

OSS:  $L(\bar{q}_0 \rightarrow \bar{q}) =$  lavoro lungo traiettoria  $\rightarrow$  per calcolarlo serve conoscere il percorso.

Proposizione: Per un sistema che soddisfi le ipotesi [H<sub>2</sub>, H<sub>3</sub>], una configurazione di equilibrio è stabile in senso statico se corrisponde ad un minimo isolato dell'energia potenziale

dim:  $0 > L(\bar{q}_0 \rightarrow \bar{q}) = \int_{\bar{q}_0 \rightarrow \bar{q}} \vec{F} \cdot d\vec{e} = -\int_{\bar{q}_0 \rightarrow \bar{q}} \nabla_{\bar{q}} U \cdot d\vec{e} = -[U(\bar{q}) - U(\bar{q}_0)] \Rightarrow U(\bar{q}) > U(\bar{q}_0) \Rightarrow$  minimo isolato

Esempio



OP, PQ = aste rigide di lunghezza  $l$  e massa  $m$ ;

H = baricentro di OP, K = baricentro di PQ;

O = cerniera fissa, P = cerniera mobile, Q = carrello;

OQ = molla ideale di costante elastica  $k$ .

Fozze attive:  $\vec{F}_H = \vec{F}_K = -mg \hat{j}$  } conservative con  $\left\{ \begin{aligned} U_H &= mg y_H, & U_K &= mg y_K \\ \vec{F}_O &= -\vec{F}_Q = k \vec{OQ} \end{aligned} \right.$   $\left\{ \begin{aligned} U_Q &= \frac{1}{2} k x_Q^2 \end{aligned} \right.$

$$U(\theta) = U_H + U_K + U_Q = mg \left( \frac{l}{2} \sin \theta \right) + mg \left( \frac{l}{2} \sin \theta \right) + \frac{1}{2} k (2l \cos \theta)^2 = 4kl^2 \left[ \frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{mg}{4kl} \sin \theta \right]$$

$$U'(\theta) = 4kl^2 \left[ \frac{1}{2} 2 \cos \theta (-\sin \theta) + \lambda \cos \theta \right] = 4kl^2 [\lambda - \sin \theta] \cos \theta$$

↳ Equilibrio  $\Leftrightarrow U'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \vee \theta = -\frac{\pi}{2} \vee (\lambda \leq 1, \theta = \theta_\lambda = \arcsin \lambda)$

$$U''(\theta) = 4kl^2 [(-\cos \theta) \cos \theta + (\lambda - \sin \theta)(-\sin \theta)] = 4kl^2 [2 \sin^2 \theta - 1 - \lambda \sin \theta]$$

↳ Stabilità  $\Leftrightarrow U''(\theta_{eq}) > 0$ :  $U''(\pi/2) = 4kl^2 [1 - \lambda] > 0 \rightarrow \theta = \pi/2$  stabile se  $\lambda < 1$   
 $U''(-\pi/2) = 4kl^2 [1 + \lambda] > 0 \rightarrow \theta = -\pi/2$  sempre stabile  
 $U''(\theta_\lambda) = 4kl^2 [\lambda^2 - 1] < 0 \rightarrow \theta = \theta_\lambda$  sempre instabile ( $\lambda < 1$ )

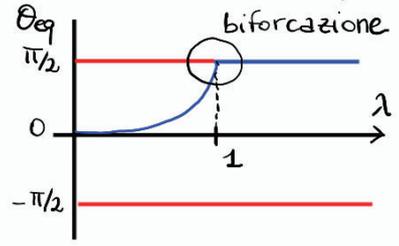
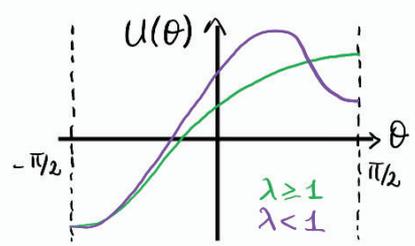
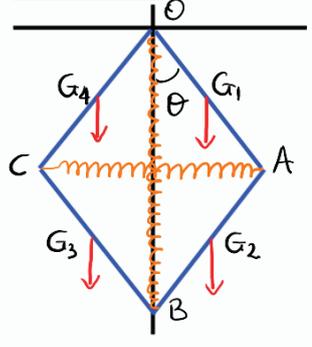


Diagramma di biforcazione

Rappresenta punti di equilibrio stabili e instabili al variare dei parametri del sistema

Esercizio



OA, AB, BC, CO aste omogenee di lunghezza  $l$  e massa  $m$   
 $G_1, G_2, G_3, G_4$  sono i rispettivi baricentri  
 $O =$  cerniera fissa,  $A, B, C =$  cerniere mobili

OB = molla ideale con costante elastica  $k$   
 AC = " " " " " "

# gdl = 1 [Esercizio]  $\rightarrow$  coordinate generalizzate  $\theta = \widehat{BOA} \in [-\pi, \pi]$

$$U = mg y_{G1} + mg y_{G2} + mg y_{G3} + mg y_{G4} + \frac{1}{2} k y_B^2 + \frac{1}{2} h (x_A - x_C)^2$$

$$= mg \left( -\frac{l}{2} \cos \theta - \frac{3}{2} l \cos \theta - \frac{3}{2} l \cos \theta - \frac{l}{2} \cos \theta \right) + \frac{1}{2} k (2l \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} h (2l \sin \theta)^2$$

$$= -4mg l \cos \theta + 2kl^2 \cos^2 \theta + 2hl^2 \sin^2 \theta = 4mg l \left[ \frac{1}{2\lambda} \cos^2 \theta - \cos \theta + \frac{hl}{2mg} \right]$$

$$U'(\theta) = 4mg l \left[ \frac{1}{\lambda} \cos \theta (-\sin \theta) - (-\sin \theta) \right] = \frac{4mg l}{\lambda} (\lambda - \cos \theta) \sin \theta$$

$$\lambda = \frac{mg}{(k-h)l} \in \mathbb{R}$$

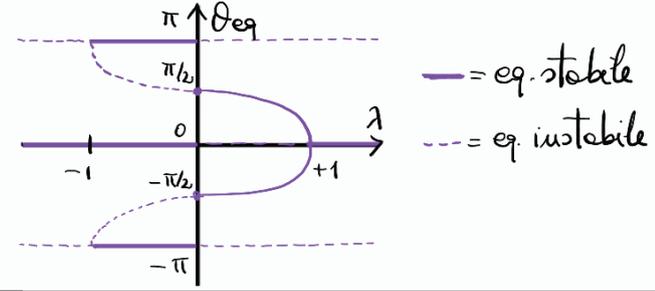
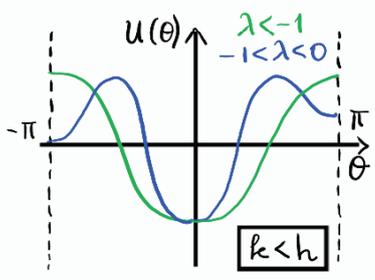
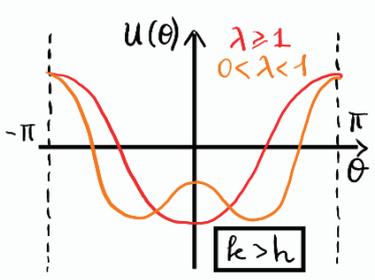
↳ Equilibrio  $\Leftrightarrow U'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \vee \theta = \pi \vee (\lambda < 1, \theta = \pm \theta_\lambda = \pm \arccos \lambda)$

$$U''(\theta) = \frac{4mg l}{\lambda} [\sin \theta \sin \theta + (\lambda - \cos \theta) \cos \theta] = \frac{4mg l}{\lambda} [-2 \cos^2 \theta + \lambda \cos \theta + 1]$$

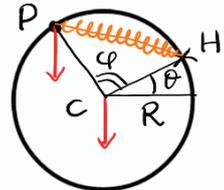
↳ Stabilità  $\Leftrightarrow U''(\theta) \geq 0$ :  $U''(0) = 4mg l (1 - \frac{1}{\lambda}) \rightarrow \theta = 0$  stabile se  $\frac{1}{\lambda} \leq 1$

$U''(\pi) = 4mg l (-1 - \frac{1}{\lambda}) \rightarrow \theta = \pi$  stabile se  $\frac{1}{\lambda} \leq -1$

$U''(\pm \theta_\lambda) = 4mg l (\frac{1}{\lambda} - \lambda) \rightarrow \theta = \pm \theta_\lambda$  stabile se  $\frac{1}{\lambda} \geq \lambda$



Esercizio



Disco omogeneo di raggio  $R$ , massa  $M$ , centro  $C$  (cerniera fissa)  
 $P =$  punto materiale di massa  $m$ , vincolato a scorrere senza attrito sul bordo del disco, collegato con molla ideale di costante  $k$  ad un punto  $H$  sul bordo del disco.

# g.d.l. = (3+2) - (2+1) = 2 → coord. generalizzate:  $\theta = H\hat{C}\hat{i}$  = orientazione disco  
 $\varphi = H\hat{C}P$  → posizione di P rispetto ad H.

$$U(\theta, \varphi) = \cancel{Mg y_c} + mg y_p + \frac{1}{2} k |\overline{HP}|^2 = mgR \sin(\theta + \varphi) + \frac{1}{2} k [(R \cos(\theta + \varphi) - R \cos \theta)^2 + (R \sin(\theta + \varphi) - R \sin \theta)^2]$$

$$= mgR \sin(\theta + \varphi) + \frac{1}{2} k R^2 \left[ \cancel{2} - 2 \cos \varphi \right] = mgR \left[ \sin(\theta + \varphi) - \frac{kR}{mg} \cos \varphi \right] \quad \lambda := \frac{kR}{mg} > 0$$

$$\nabla U(\theta, \varphi) = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta}, \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) = mgR \left( \cos(\theta + \varphi), \cos(\theta + \varphi) + \lambda \sin \varphi \right)$$

$$\hookrightarrow \text{Equilibrio} \Leftrightarrow \nabla U = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta + \varphi) = 0 \\ \cos(\theta + \varphi) + \lambda \sin \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta + \varphi) = 0 \\ \sin \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\theta, \varphi) \in \left\{ \left( \pm \frac{\pi}{2}, 0 \right), \left( \pm \frac{\pi}{2}, \pi \right) \right\}$$

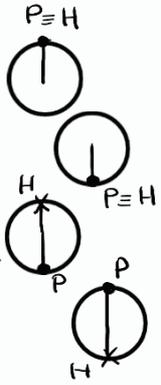
$$\text{Hess } U(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \theta} & \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \end{pmatrix} = mgR \begin{pmatrix} -\sin(\theta + \varphi) & -\sin(\theta + \varphi) \\ -\sin(\theta + \varphi) & -\sin(\theta + \varphi) + \lambda \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$  Stabilità:  $\text{Hess } U\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = mgR \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 + \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 \text{ autovalore} > 0 \\ 1 \text{ autovalore} < 0 \end{matrix} \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ instabile}$

$\text{Hess } U\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) = mgR \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \lambda \end{pmatrix} \rightarrow 2 \text{ autovalori} > 0 \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ stabile}$

$\text{Hess } U\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = mgR \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 \text{ autovalore} > 0 \\ 1 \text{ autovalore} < 0 \end{matrix} \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ instabile}$

$\text{Hess } U\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) = mgR \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \rightarrow 2 \text{ autovalori} < 0 \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ instabile}$



## 5) DINAMICA

### 5.1) Quantità meccaniche

Def: Dato un punto materiale di massa  $m$ , posizione  $P \in E^3$  e velocità  $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ , sul quale agisce una forza  $\bar{F}$ , si definiscono le quantità meccaniche associate

- impulso:  $\bar{p} = m\bar{v}$ ;
- momento angolare rispetto al polo  $Q \in E^3$ :  $\bar{L}_Q = \overline{QP} \wedge m\bar{v} = \overline{QP} \wedge \bar{p}$ ;
- energia cinetica:  $T = \frac{1}{2} m |\bar{v}|^2 = \frac{1}{2m} |\bar{p}|^2$ ;
- potenza:  $\Pi = \bar{F} \cdot \bar{v}$ .

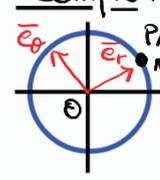
Oss: tutte le quantità meccaniche sono definite rispetto ad un sist. di ref.  $(\Theta, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  che osserveremo essere sempre inerziale

Oss:  $\dot{\bar{p}} = m\bar{a}$ ,  $m\bar{a} = \bar{F} \Rightarrow \dot{\bar{p}} = \bar{F}$

$$\bar{F} = -\nabla U \text{ (conservative)} \Rightarrow 0 = (m\bar{a} - \bar{F}) \cdot \bar{v} = m\dot{\bar{v}} \cdot \bar{v} + \nabla U \cdot \bar{v} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m |\bar{v}|^2 + U(\bar{x}) \right]$$

$$\Rightarrow E = T + U = \text{energia totale conservata.}$$

Esempio: punto materiale di massa  $m$  vincolato a circonferenza di raggio  $r$



$\bar{OP} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} = r \bar{e}_r$   
 $\bar{v} = \dot{\bar{OP}} = r \dot{\theta} \bar{e}_\theta \Rightarrow \bar{p} = m\bar{v} = m r \dot{\theta} \bar{e}_\theta$   
 $\bar{L}_O = \overline{OP} \wedge m\bar{v} = (r \bar{e}_r) \wedge (m r \dot{\theta} \bar{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \hat{k} = I \bar{\omega}$   
 $T = \frac{1}{2} m |\bar{v}|^2 = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$

Tutte le quantità meccaniche sono estensive e si generalizzano come segue:

Sistemi discreti ( $N$  punti materiali)

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i$$

$$\bar{L}_Q = \sum_{i=1}^N \overline{QP_i} \wedge m_i \bar{v}_i$$

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\bar{v}_i|^2$$

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i$$

Sistemi continui ( $\rho(\bar{x}) = \text{densità di massa}$ )

$$M = \int \rho(\bar{x}) d^3 \bar{x}$$

$$\bar{P} = \int \rho(\bar{x}) \bar{x} d^3 \bar{x}$$

$$\bar{L}_Q = \int \rho(\bar{x}) (\bar{x} - \bar{x}_Q) \wedge \dot{\bar{x}} d^3 \bar{x}$$

$$T = \frac{1}{2} \int \rho(\bar{x}) |\dot{\bar{x}}|^2 d^3 \bar{x}$$

$$\Pi = \int \bar{f}(\bar{x}) \cdot \dot{\bar{x}} d^3 \bar{x} \quad (\bar{f} = \text{densità di forze})$$

Nel seguito si considera sempre un sistema di punti materiali  $\{P_i\}_{i=1, \dots, N}$  con massa totale  $M = \sum_i m_i$ , baricentro  $G$  t.c.  $\overline{OG} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \overline{OP_i}$ .

Lemma:  $\bar{P} = M \bar{v}_G$

Oss: In un sist. di ref. solidale con  $G = \text{cdm}$  si ha  $\bar{v}_G = \bar{0} \Rightarrow \bar{P} = \bar{0}$

dim:  $\bar{P} = \sum_i m_i \bar{v}_i = \sum_i m_i \dot{\overline{OP_i}} = \frac{d}{dt} \left( M \cdot \frac{1}{M} \sum_i m_i \overline{OP_i} \right) = \frac{d}{dt} (M \overline{OG}) = M \bar{v}_G \quad \square$

Lemma (Legge di trasporto del momento angolare):  $\bar{L}_{Q'} = \bar{L}_Q + \bar{P} \wedge \overline{QQ'}$   $\forall Q, Q' \in E^3$

dim:  $\bar{L}_{Q'} = \sum_i \overline{Q'P_i} \wedge m_i \bar{v}_i = \sum_i (\overline{Q'Q} + \overline{QP_i}) \wedge m_i \bar{v}_i = \overline{Q'Q} \wedge (\sum_i m_i \bar{v}_i) + \sum_i \overline{QP_i} \wedge m_i \bar{v}_i = \overline{Q'Q} \wedge \bar{P} + \bar{L}_Q \quad \square$

Proposizione (Teorema di König per il momento angolare) Siano  $\{\bar{v}_i^{(G)}\}$  le velocità dei punti  $\{P_i\}$  in un sist. di ref. solidale col cdm  $G$ . Allora

$$\bar{L}_Q = \bar{L}_G^{(G)} + \overline{QG} \wedge M \bar{v}_G \quad \text{con} \quad \bar{L}_G^{(G)} = \sum_i \overline{GP_i} \wedge m_i \bar{v}_i^{(G)}$$

OSS:  $Q = G \Rightarrow \bar{L}_G = \bar{L}_G^{(G)}$

dim: Lemma su momento angolare con  $(Q, Q') \rightarrow (G, Q)$ :  $\bar{L}_Q = \bar{L}_G + \bar{Q} \bar{G} \wedge \bar{P}$  con  $\bar{P} = M \bar{V}_G$ .  
 Allora per dimostrare la tesi è sufficiente far vedere che  $\bar{L}_G = \bar{L}_G^{(G)}$ .

$$\bar{L}_G = \sum_i \bar{Q} P_i \wedge m_i \bar{v}_i = \sum_i \bar{Q} P_i \wedge m_i (\bar{v}_G + \bar{v}_i^{(G)}) \quad [\text{Teo. Galilei} \Rightarrow \bar{v}_i = \bar{v}_G + \bar{v}_i^{(G)}]$$

$$= (\sum_i m_i \bar{Q} P_i) \wedge \bar{v}_G + \sum_i \bar{Q} P_i \wedge m_i \bar{v}_i^{(G)} = M \bar{Q} \bar{G} \wedge \bar{v}_G + \bar{L}_G^{(G)} = \bar{L}_G^{(G)}$$

Proposizione (Teorema di König per l'energia cinetica) Siano  $\{\bar{v}_i^{(G)}\}$  le velocità dei punti  $\{P_i\}$  in un sist. di ref. solidale col cdm G. Allora

$$T = T^{(G)} + \frac{1}{2} M |\bar{V}_G|^2 \quad \text{con} \quad T^{(G)} = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\bar{v}_i^{(G)}|^2$$

dim:  $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\bar{v}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\bar{v}_G + \bar{v}_i^{(G)}|^2$  [Teo Galilei  $\Rightarrow \bar{v}_i = \bar{v}_G + \bar{v}_i^{(G)}$ ]

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i (|\bar{v}_G|^2 + 2 \bar{v}_G \cdot \bar{v}_i^{(G)} + |\bar{v}_i^{(G)}|^2) = \frac{1}{2} (\sum_i m_i) |\bar{v}_G|^2 + \bar{v}_G \cdot \sum_i m_i \bar{v}_i^{(G)} + \frac{1}{2} \sum_i m_i |\bar{v}_i^{(G)}|^2$$

$$= \frac{1}{2} M |\bar{v}_G|^2 + \bar{v}_G \cdot M \bar{V}_G^{(G)} + T^{(G)}$$

5.2) Equazioni cardinali della dinamica

Ricordiamo le seguenti ipotesi che avevano già giocato un ruolo nella derivazione delle ECS.

[H<sub>0</sub>] Assumeremo sempre che  $\bar{F}_i$  soddisfino ipotesi regolarità t.c.  $\exists!$  soluzione

[H<sub>1</sub>] Assumeremo sempre che le forze interne siano dovute a interazioni tra coppie di punti, che rispettino il III° principio di Newton e che siano dirette lungo la congiungente dei punti interessati:

$$\bar{F}_i^{(int)} = \sum_{j \neq i} \bar{F}_{ij} \quad \text{con} \quad \bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}, \quad \bar{F}_{ij} \wedge \overline{P_i P_j} = \bar{0}$$


Teorema (Equazioni cardinali della dinamica) Dato un sistema di punti materiali che soddisfi le ipotesi [H<sub>0</sub>][H<sub>1</sub>] e su cui agisce un sistema di forze esterne con risultanti  $\bar{R}^{(ext)}, \bar{M}_Q^{(ext)}$ , si ha

$$(I) \dot{\bar{P}} = \bar{R}^{(ext)} \quad (II) \dot{\bar{L}}_Q = \bar{M}_Q^{(ext)} + \bar{P} \wedge \bar{V}_Q \quad \text{ECD}$$

dim:  $\dot{\bar{P}} = \frac{d}{dt} (\sum_i m_i \bar{v}_i) = \sum_i m_i \bar{a}_i = \sum_i \bar{F}_i = \sum_i (\bar{F}_i^{(int)} + \bar{F}_i^{(ext)}) = \underbrace{\bar{R}^{(int)}}_{[H_1]} + \bar{R}^{(ext)} = \bar{R}^{(ext)}$

$$\dot{\bar{L}}_Q = \frac{d}{dt} (\sum_i \bar{Q} P_i \wedge m_i \bar{v}_i) = \sum_i [(\dot{\bar{v}}_i - \bar{V}_Q) \wedge m_i \bar{v}_i + \bar{Q} P_i \wedge m_i \bar{a}_i] = -\bar{V}_Q \wedge \bar{P} + \sum_i \bar{Q} P_i \wedge \bar{F}_i$$

$$= \bar{P} \wedge \bar{V}_Q + (\underbrace{\bar{M}_Q^{(int)}}_{[H_1]} + \bar{M}_Q^{(ext)}) = \bar{P} \wedge \bar{V}_Q + \bar{M}_Q^{(ext)}$$

OSS:  $\bar{R}^{(ext)} = \bar{R}^{(ext, A)} + \bar{R}^{(ext, V)}$   
 $\bar{M}_Q^{(ext)} = \bar{M}_Q^{(ext, A)} + \bar{M}_Q^{(ext, V)}$   
 attive reazioni vincolari }  $\Rightarrow$  ECD non sono equazioni pure del moto

OSS: In generale, ECD sono condizioni necessarie ma non sufficienti per determinare il moto del sistema (si rivedano ECS per discorso analogo).

OSS: ECD<sub>II</sub> dipende dal polo, ma ECD<sub>II</sub> rispetto ad un altro polo è determinata da ECD<sub>I}, ECD<sub>II</sub></sub>

Proprietà trasporto  $\Rightarrow \bar{M}_{Q'}^{(ext)} = \bar{M}_Q^{(ext)} + \bar{Q}' \bar{Q} \wedge \bar{R}^{(ext)}, \bar{L}_{Q'} = \bar{L}_Q + \bar{Q}' \bar{Q} \wedge \bar{P}$

$$\Rightarrow \dot{\bar{L}}_{Q'} = \dot{\bar{L}}_Q + (\bar{V}_Q - \bar{V}_{Q'}) \wedge \bar{P} + \bar{Q}' \bar{Q} \wedge \dot{\bar{P}} = (\bar{M}_Q^{(ext)} + \bar{P} \wedge \bar{V}_Q) + \bar{P} \wedge (\bar{V}_{Q'} - \bar{V}_Q) + \bar{Q}' \bar{Q} \wedge \bar{R}^{(ext)} = \bar{M}_{Q'}^{(ext)} + \bar{P} \wedge \bar{V}_{Q'}$$

$\uparrow$  ECD<sub>II} \qquad \qquad \qquad \uparrow ECD<sub>I}</sub></sub>

NB: Il polo  $Q$  è arbitrario e non necessariamente  $Q \in \{P_i\}_{i=1, \dots, N}$

OSS: ( $Q = \text{pt. fisso}$ ) v ( $Q = \text{cdm}$ ) v ( $\{P_i\} = \text{corpo rigido e } Q = \text{CIR}$ )  $\Rightarrow \dot{L}_Q = \bar{M}_Q^{(est)}$

( $Q \text{ fisso v } Q = \text{CIR} \Rightarrow \bar{v}_Q = \bar{0}$ ;  $Q = G = \text{cdm} \Rightarrow \bar{v}_Q \wedge \bar{P} = \bar{v}_G \wedge (M\bar{v}_G) = \bar{0}$ ).

OSS: Teoremi di conservazione:  $\bar{R}^{(est)} = \bar{0} \Rightarrow \dot{\bar{P}} = \bar{0} \Rightarrow \bar{P}(t) = \bar{P}(0) \forall t \in \mathbb{R}$

$\bar{M}_Q^{(est)} = 0$  con  $Q$  fisso v cdm v cir  $\Rightarrow \dot{L}_Q = \bar{0} \Rightarrow L_Q(t) = L_Q(0) \forall t \in \mathbb{R}$

Esempio: proiettile di massa  $m$  sparato da cannone di massa  $M$

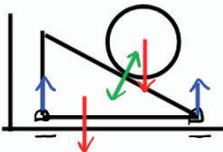


$t < 0$ : sistema in quiete  
 $\bar{v}_m = \bar{v}_M = \bar{0} \Rightarrow \bar{P} = \bar{0}$



$t > 0$ :  $\bar{v}_m^i, \bar{v}_M^i \neq \bar{0}$   
 $\bar{0} = \bar{P} = m\bar{v}_m^i + M\bar{v}_M^i$   
 $\Rightarrow \bar{v}_M^i = -\frac{m}{M}\bar{v}_m^i$

Esempio:



— = forze attive esterne  
— = reaz. vincolari esterne  
— = reaz. vincolari interne

verticali  $\Rightarrow R_x^{(est)} = \bar{R}^{(est)} \cdot \hat{i} = 0$   
 $\hookrightarrow \dot{P}_x = \dot{\bar{P}} \cdot \hat{i} = \bar{R}^{(est)} \cdot \hat{i} = 0 \Rightarrow P_x = \text{cost.}$

OSS: Teorema del cdm:  $M\bar{a}_G = \frac{d}{dt}(M\bar{v}_G) = \dot{\bar{P}} = \bar{R}^{(est)}$

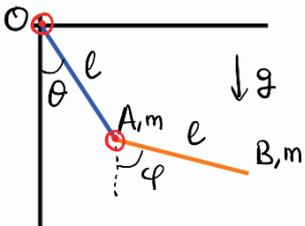
$\hookrightarrow$  cdm si muove come un pt. materiale di massa  $M$  su cui agisce la risultante esterna (in particolare, cdm in quiete o moto rettilineo uniforme se  $\bar{R}^{(est)} = \bar{0}$ ).

OSS: L'azione delle forze esterne può dipendere dalla configurazione del sistema (attivi)  
L'azione delle forze interne può modificare la configurazione del sistema (non rigido)  
 $\Rightarrow$  Le forze interne possono influenzare indirettamente il moto del sistema

Esempio: paracadute  $\rightarrow \mathcal{F}^{(est)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{forza peso (indip. da config in prima approx.)} \\ \text{resistenza aria (dipende da forma del corpo)} \end{array} \right\}$   
 $\mathcal{F}^{(int)} = \{ \text{trazione corda} \} \rightarrow$  immesca paracadute  
 $\hookrightarrow$  cambiamento forma.

Esempio: doppio pendolo:  $A, B$  punti materiali di massa  $m$

$OA, OB =$  aste rigide ideali di lunghezza  $l$  e massa trascurabile  
 $O =$  cerniera fissa,  $A =$  cerniera mobile



# gdl:  $\left. \begin{array}{l} (OA = 2 + 1) + (AB = 2 + 1) \\ (O = -2) + (A = -2) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \text{ gdl} \rightarrow$  coord generalizzate  
 $\theta, \varphi \in (0, 2\pi)$

Forze esterne:  $\mathcal{F}^{(est)} = \{ (O, \bar{\Phi}_0), (A, \bar{F}_A), (B, \bar{F}_B) \}$

con  $\bar{OA} = l\bar{e}_1$ ,  $\bar{OB} = \bar{OA} + \bar{AB} = l\bar{e}_1 + l\bar{e}_2$ ,  $\bar{F}_A = \bar{F}_B = -mg\hat{j}$

• Sistema completo:

$$\bar{P} = m\bar{v}_A + m\bar{v}_B = ml\dot{\bar{e}}_1 + m(l\dot{\bar{e}}_1 + l\dot{\bar{e}}_2) = ml(2\dot{\theta}\bar{e}_\theta + \dot{\varphi}\bar{e}_\varphi)$$

$$\dot{\bar{P}} = ml(2\ddot{\theta}\bar{e}_\theta - 2\dot{\theta}^2\bar{e}_1 + \ddot{\varphi}\bar{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2\bar{e}_2) = \bar{R}^{(est)} = \bar{F}_A + \bar{F}_B + \bar{\Phi} = -2mg\hat{j} + \bar{\Phi}_0 \rightarrow \text{contiene } \bar{\Phi}_0$$

$$\bar{L}_O = \bar{OA} \wedge m\bar{v}_A + \bar{OB} \wedge m\bar{v}_B = (l\bar{e}_1) \wedge (ml\dot{\theta}\bar{e}_\theta) + (l\bar{e}_1 + l\bar{e}_2) \wedge m(l\dot{\theta}\bar{e}_\theta + l\dot{\varphi}\bar{e}_\varphi)$$

$$= ml^2[\dot{\theta}\hat{k} + \dot{\theta}\hat{k} + \dot{\varphi}\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_\varphi + \dot{\theta}\bar{e}_2 \wedge \bar{e}_\theta + \dot{\varphi}\hat{k}] = ml^2[2\dot{\theta} + \dot{\varphi} + \cos(\theta - \varphi)(\dot{\theta} + \dot{\varphi})]\hat{k}$$

$$\dot{\bar{L}}_O = ml^2[(2 + \cos(\theta - \varphi))\ddot{\theta} + (1 + \cos(\theta - \varphi))\ddot{\varphi} - \sin(\theta - \varphi)(\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi}^2)]\hat{k}$$

$$\bar{M}_O^{(est)} = \bar{O} \wedge \bar{\Phi} + \bar{OA} \wedge \bar{F}_A + \bar{OB} \wedge \bar{F}_B = (l\bar{e}_1) \wedge (-mg\hat{j}) + (l\bar{e}_1 + l\bar{e}_2) \wedge (-mg\hat{j}) = -mgl[2\sin\theta + \sin\varphi]\hat{k}$$

$$\bar{v}_O = \bar{0} \Rightarrow \dot{\bar{L}}_O = \bar{M}_O^{(est)} \Rightarrow [2 + \cos(\theta - \varphi)]\ddot{\theta} + [1 + \cos(\theta - \varphi)]\ddot{\varphi} - \sin(\theta - \varphi)(\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi}^2) + \frac{g}{l}[2\sin\theta + \sin\varphi] = 0$$

$\hookrightarrow$  1 eq. pura, 2 incognite  $(\theta, \varphi)$ .

• Sottoinsieme AB

$$\bar{P} = m\bar{v}_B \rightarrow \dot{\bar{P}} = m(\bar{F}_B + \bar{\Phi}_A) \rightarrow \text{contiene } \bar{\Phi}_A$$

$$\bar{L}_A = \bar{AA} \wedge m\bar{v}_A + \bar{AB} \wedge m\bar{v}_B = (l\bar{e}_2) \wedge (ml\dot{\varphi}\bar{e}_\varphi) = ml^2\dot{\varphi}\hat{k} \rightarrow \dot{\bar{L}}_A = ml^2\ddot{\varphi}\hat{k}$$

$$\bar{M}_A = \bar{AA} \wedge \bar{\Phi}_A + \bar{AB} \wedge \bar{F}_B = (l\bar{e}_2) \wedge (-mg\hat{j}) = -mgl\sin\varphi\hat{k}$$

$$\vec{v}_A \wedge \vec{p} = (l \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \wedge m (l \dot{\theta} \vec{e}_\theta + l \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = ml^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\theta - \varphi) \hat{k} \quad \leftarrow 1 \text{ eq. prva, 2 incongrite}$$

$$\Rightarrow \vec{0} = \vec{L}_A - \vec{M}_A - \vec{p} \wedge \vec{v}_A = [ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi + ml^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\theta - \varphi)] \hat{k} \Rightarrow \ddot{\varphi} + \sin(\theta - \varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Teorema dell'energia cinetica (Teorema delle forze vive) Per ogni sistema meccanico che soddisfi le ipotesi [H<sub>0</sub>] si ha

$$\dot{T} = \Pi$$

$$\text{dim: } \dot{T} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2 \right) = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \dot{\vec{v}}_i = \sum_i \vec{v}_i \cdot (m_i \vec{a}_i) = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i = \Pi \quad \blacksquare$$

OSS: Teorema del lavoro: [H<sub>0</sub>]  $\Rightarrow \Delta T = T_f - T_i = L =$  lavoro svolto da tutte le forze

$$\Delta T = T_f - T_i = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dT}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} \Pi dt = \int_{t_i}^{t_f} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt = \sum_i \int_{r_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{l}_i = \sum_i L_i = L$$

OSS:  $\Pi =$  potenza prodotta da tutte le forze (interne/esterne, attive/reactive).

OSS: Nel caso di corpi non rigidi, forze interne con risultanti nulle possono comunque produrre potenza non nulla, e quindi compiere lavoro

Esempio:  $\begin{matrix} \bullet & \text{mmmm} & \bullet \\ A, m & & B, m \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \vec{F}_A = k \vec{AB} \\ \vec{F}_B = -k \vec{AB} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} \\ \vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B = \vec{AB} \wedge \vec{F}_B = \vec{AB} \wedge (-k \vec{AB}) = \vec{0} \end{cases}$

$$\Rightarrow \Pi = \vec{v}_A \cdot \vec{F}_A + \vec{v}_B \cdot \vec{F}_B = (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \vec{F}_A = (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot k \vec{AB} \neq 0$$

OSS: [H<sub>0</sub>] + [H<sub>2</sub>] (vincoli fissi perfetti)  $\Rightarrow \dot{T} = \Pi^{(A)}$   $\rightarrow$  equazione prva

$$\text{Vincoli perfetti con reazioni vincolari } \{ \vec{\Phi}_i \}_{i=1, \dots, N} \Rightarrow \Pi^{(V)} = \sum_i \vec{\Phi}_i \cdot \vec{v}_i = 0 \quad \forall \{ \vec{v}_i \} \text{ velocità virt.}$$

$$\text{Vincoli fissi} \Rightarrow \text{velocità virtuali} \equiv \text{velocità reali} \Rightarrow \dot{T} = \Pi = \Pi^{(A)} + \Pi^{(V)} = \Pi^{(A)} + \Pi^{(V)} = \Pi^{(A)}$$

Def: Una funzione  $f((P_1, \vec{v}_1), \dots, (P_N, \vec{v}_N); t)$  è detta costante del moto (integrale primo) se è costante lungo qualunque soluzione delle equazioni del moto, cioè delle eq. di Newton

$$f((P_1(t), \vec{v}_1(t)), \dots, (P_N(t), \vec{v}_N(t)); t) = \text{cost.} \quad \text{se} \quad m_i \ddot{\vec{p}}_i(t) = \vec{F}_i \quad \leftrightarrow \quad \dot{f} = \frac{d}{dt} f = 0.$$

OSS:  $f = \text{cost} = f|_{t=0} = f((P_1(0), \vec{v}_1(0)), \dots, (P_N(0), \vec{v}_N(0)); 0) \rightarrow$  valore della costante determinato dai dati iniziali (posizioni e velocità a  $t=0$ ).

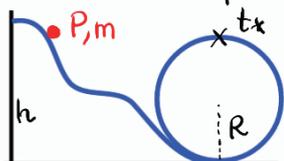
Teorema (Conservazione dell'energia meccanica) Dato un sistema che soddisfa le ipotesi [H<sub>0</sub>], [H<sub>2</sub>] (vincoli fissi perfetti), [H<sub>3</sub>] (forze attive posizionali conservative), allora

$$E = T + U = (\text{en. cinetica}) + (\text{en. potenziale}) = \text{en. meccanica}$$

è una costante del moto.

$$\text{dim: } \dot{E} = \dot{T} + \dot{U} = \Pi + \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_i (-\vec{F}_i) \cdot \vec{v}_i = 0 \quad \blacksquare$$

Esempio: Biglia che rotola su pista ideale senza attrito. Da che altezza deve partire per compiere un giro della morte su un tratto di pista circolare di raggio R?



Biglia = pt. materiale di massa m

$t=0 \rightarrow$  biglia ferma ad altezza  $h$ ;  $t=t_*$   $\rightarrow$  biglia nel punto di inversione

$$E = T + U = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + mgy$$

$$\left. \begin{aligned} E|_{t=0} &= mgh \\ E|_{t=t_*} &= \frac{1}{2} m |\vec{v}_*|^2 + mg(2R) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} h &= \frac{|\vec{v}_*|^2}{2g} + 2R \geq 2R \rightarrow \text{per raggiungere pt. inversione a } t=t_* \\ |\vec{v}_*|^2 &= 2g(h - 2R) \rightarrow \text{abbastanza grande da impedire caduta} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ECD} \Rightarrow \vec{p} = \vec{r}^{(ext)} \Rightarrow m \dot{\vec{v}} &= -mg \hat{j} + \vec{\Phi} \\ \text{Tratto circolare} \Rightarrow \vec{v} &= R \dot{\theta} \vec{e}_\theta, \quad \dot{\vec{v}} = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r \\ \vec{\Phi} &= -\phi \vec{e}_r \quad \text{con } \phi \geq 0 \\ \vec{e}_r|_{t=t_*} &= \hat{j}, \quad \vec{e}_\theta|_{t=t_*} = -\hat{i} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} m(-R \ddot{\theta} \hat{i} - R \dot{\theta}^2 \hat{j}) &= -mg \hat{j} - \phi \hat{j} \\ \hookrightarrow \ddot{\theta} &= 0 \quad \text{e} \quad mR \dot{\theta}^2 = mg + \phi \geq mg \\ \hookrightarrow |\vec{v}_*|^2 &= (R \dot{\theta})^2 \geq Rg \\ \hookrightarrow 2g(h - 2R) &\geq Rg \Rightarrow \boxed{h \geq \frac{5}{2} R} \end{aligned}$$

### 5.3) Dinamica del corpo rigido

Finora abbiamo studiato sistemi di punti materiali generici. I risultati ottenuti restano veri in particolare nel caso di corpi rigidi. Sfruttando il vincolo di rigidità si possono però riformulare alcuni risultati in modo più conveniente.

Proposizione: Per un corpo rigido di massa totale  $M$ , cdm  $G$  e velocità angolare  $\bar{\omega} \in \mathbb{R}^3$ , il momento angolare rispetto a un polo  $Q$  solidale col corpo rigido è

$$\boxed{L_Q = \overline{QG} \wedge M \bar{v}_Q + \mathbb{I}_Q \bar{\omega}}$$

dove  $\mathbb{I}_Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un'applicazione lineare detta tensore d'inerzia (rispetto al polo  $Q$ ):

$$\boxed{\mathbb{I}_Q \bar{\omega} = \sum_{i=1}^N m_i \overline{QP_i} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{QP_i}) = \sum_{i=1}^N m_i [|\overline{QP_i}|^2 \bar{\omega} - (\overline{QP_i} \cdot \bar{\omega}) \overline{QP_i}] \quad \forall \bar{\omega} \in \mathbb{R}^3}$$

$$\begin{aligned} \text{dim: vincolo di rigidità + } Q \text{ solidale} &\rightarrow \text{teo. Rivals: } \bar{v}_P = \bar{v}_Q + \bar{\omega} \wedge \overline{QP} \quad \forall P \in \mathcal{E} \\ \Rightarrow L_Q = \sum_{i=1}^N \overline{QP_i} \wedge (m_i \bar{v}_i) &= \sum_{i=1}^N m_i \overline{QP_i} \wedge [\bar{v}_Q + \bar{\omega} \wedge \overline{QP_i}] = \left( \sum_i m_i \overline{QP_i} \right) \wedge \bar{v}_Q + \sum_i m_i \overline{QP_i} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{QP_i}) \\ &= M \overline{QG} \wedge \bar{v}_Q + \mathbb{I}_Q \bar{\omega}. \end{aligned}$$

OSS: Le proprietà del tensore d'inerzia verranno discusse in seguito. Ci limitiamo ad osservare che

- Fissato  $(Q, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$  sist. di ref.,  $\mathbb{I}_Q$  è rappresentato da una matrice  $\hat{\mathbb{I}}_Q$  con componenti

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbb{I}}_Q)_{ab} &= \sum_{i=1}^N m_i [|\overline{QP_i}|^2 \delta_{ab} - (\overline{QP_i})_a (\overline{QP_i})_b] \quad a, b \in \{1, 2, 3\} \\ \hat{\mathbb{I}}_Q &= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \\ \hookrightarrow (\mathbb{I}_Q \bar{\omega})_a &= \sum_{b=1}^3 (\hat{\mathbb{I}}_Q)_{ab} \omega_b \end{aligned}$$

- Nel caso di un corpo rigido piano  $\mathcal{E} = \{P_i\}_{i=1, \dots, N} \subset \pi$ , fissato un polo  $Q \in \pi$  si ha:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \overline{QP_i} \subset \pi \quad \forall i \\ \bar{\omega} \perp \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\omega} \cdot \overline{QP_i} = 0 \Rightarrow \mathbb{I}_Q \bar{\omega} &= \sum_{i=1}^N m_i [|\overline{QP_i}|^2 \bar{\omega} - (\overline{QP_i} \cdot \bar{\omega}) \overline{QP_i}] = \left( \sum_{i=1}^N m_i |\overline{QP_i}|^2 \right) \bar{\omega} \\ \Rightarrow \mathbb{I}_Q \bar{\omega} &= I_Q \bar{\omega} \quad \text{con } I_Q = \sum_{i=1}^N m_i |\overline{QP_i}|^2 \in \mathbb{R} \text{ (scalare)}. \end{aligned}$$

- OSS: Casi particolari:
- polo  $Q \equiv \text{cdm } G \Rightarrow \overline{QG} = \bar{0} \Rightarrow L_G = \mathbb{I}_G \bar{\omega}$
  - adm traslatorio  $\Rightarrow \bar{\omega} = \bar{0} \Rightarrow L_G = \overline{QG} \wedge M \bar{v}_Q$
  - adm rotatorio  $\Rightarrow \bar{v}_Q = \bar{0} \quad \forall Q \in \text{asse di Mozzi} \Rightarrow L_Q = \mathbb{I}_Q \bar{\omega} \quad \forall Q \in \text{asse di Mozzi}$

Proposizione: Per un corpo rigido di massa totale  $M$ , cdm  $G$  e velocità angolare  $\bar{\omega} \in \mathbb{R}^3$ , fissato un punto  $Q$  solidale al corpo rigido, l'energia cinetica è

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M |\bar{v}_Q|^2 + M \bar{v}_Q \cdot (\bar{\omega} \wedge \overline{QG}) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathbb{I}_Q \bar{\omega}}$$

$$\begin{aligned} \text{dim: vincolo di rigidità + } Q \text{ solidale} &\rightarrow \text{teo. Rivals: } \bar{v}_P = \bar{v}_Q + \bar{\omega} \wedge \overline{QP} \quad \forall P \in \mathcal{E} \\ \Rightarrow T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i |\bar{v}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\bar{v}_Q + \bar{\omega} \wedge \overline{QP_i}) \cdot (\bar{v}_Q + \bar{\omega} \wedge \overline{QP_i}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i [|\bar{v}_Q|^2 + 2 \bar{v}_Q \cdot (\bar{\omega} \wedge \overline{QP_i}) + (\bar{\omega} \wedge \overline{QP_i}) \cdot (\bar{\omega} \wedge \overline{QP_i})] \\ \hookrightarrow T_1 &= \frac{1}{2} (\sum_i m_i) |\bar{v}_Q|^2 = \frac{1}{2} M |\bar{v}_Q|^2 \\ T_2 &= \sum_i m_i \bar{v}_Q \cdot (\bar{\omega} \wedge \overline{QP_i}) = \bar{v}_Q \cdot \bar{\omega} \wedge \sum_i m_i \overline{QP_i} = \bar{v}_Q \cdot \bar{\omega} \wedge (M \overline{QG}) \\ T_3 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\bar{\omega} \wedge \overline{QP_i}) \cdot (\bar{\omega} \wedge \overline{QP_i}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \bar{\omega} \cdot \left[ \overline{QP_i} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{QP_i}) \right] = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathbb{I}_Q \bar{\omega} \end{aligned}$$

- OSS: Casi particolari:
- polo  $Q \equiv \text{cdm } G \Rightarrow \overline{QG} = \bar{0} \Rightarrow T = \frac{1}{2} M |\bar{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathbb{I}_G \bar{\omega}$
  - adm traslatorio  $\Rightarrow \bar{\omega} = \bar{0} \Rightarrow T = \frac{1}{2} M |\bar{v}_Q|^2 = \frac{1}{2} M |\bar{v}_G|^2$
  - adm rotatorio  $\Rightarrow \bar{v}_Q = \bar{0} \quad \forall Q \in \text{asse di Mozzi} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathbb{I}_Q \bar{\omega} \quad \forall Q \in \text{asse di Mozzi}$

OSS: Il tensore d'inerzia svolge nel caso di moti rotatori un ruolo analogo a quello svolto dalla massa nel caso di moti rettilinei.

### 5.3.1) Momenti di inerzia e tensore di inerzia

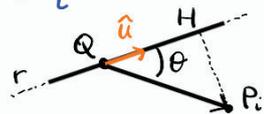
Def: Dato un sistema di punti materiali  $\{(P_i, m_i)\}_{i=1, \dots, N}$ , si definiscono:

- momento d'inerzia rispetto a un polo  $Q$ :  $I_Q = \sum_{i=1}^N m_i \text{dist}(P_i, Q)^2 = \sum_{i=1}^N m_i |\overline{QP_i}|^2$   
 rispetto a una retta  $r$ :  $I_r = \sum_{i=1}^N m_i \text{dist}(P_i, r)^2 = \sum_{i=1}^N m_i |\overline{QP_i} \wedge \hat{u}|^2$   
 rispetto a un piano  $\pi$ :  $I_\pi = \sum_{i=1}^N m_i \text{dist}(P_i, \pi)^2 = \sum_{i=1}^N m_i |\overline{QP_i} \cdot \hat{n}|^2$
- momento d'inerzia centrifugo rispetto a  $\pi, \pi'$ :  $I_{\pi, \pi'} = - \sum_{i, j=1}^N m_i \text{dist}(P_i, \pi) \text{dist}(P_j, \pi')$   
 $= - \sum_{i, j=1}^N m_i (\overline{QP_i} \cdot \hat{n}) (\overline{QP_j} \cdot \hat{n}')$

OSS: le espressioni in blu fanno riferimento alle seguenti parametrizzazioni di rette e piani:

$r = \{P = Q + \lambda \hat{u} \mid Q \in E_3, \lambda \in \mathbb{R}, \hat{u} \in \mathbb{R}^3 \text{ versore}\} =$  retta passante per  $Q$ , con vettore direttore  $\hat{u}$

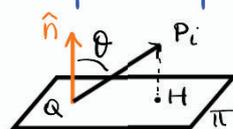
$\pi = \{P = Q + \vec{v} \mid Q \in E_3, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \vec{v} \cdot \hat{n} = 0, \hat{n} \in \mathbb{R}^3 \text{ versore}\} =$  piano passante per  $Q$ , ortogonale al vettore  $\hat{n}$



$$\overline{QP_i} = \overline{QH} + \overline{HP_i}$$

$$\text{dist}(P_i, r) = |\overline{HP_i}| = |\overline{QP_i}| \sin \theta$$

$$= |\overline{QP_i}| \wedge \hat{u}$$



$$\overline{QP_i} = \overline{QH} + \overline{HP_i}$$

$$\text{dist}(P_i, \pi) = |\overline{HP_i}| = |\overline{QP_i}| \cos \theta$$

$$= |\overline{QP_i} \cdot \hat{n}|$$

OSS: Nel caso di sistemi materiali continui con densità di massa  $\rho$  si adottano le definizioni:

$$I_Q = \int \rho(\vec{x}) |\vec{x} - \vec{x}_Q|^2 d^3\vec{x}, \quad I_r = \int \rho(\vec{x}) |(\vec{x} - \vec{x}_Q) \wedge \hat{u}|^2 d^3\vec{x}, \quad I_\pi = \int \rho(\vec{x}) |(\vec{x} - \vec{x}_Q) \cdot \hat{n}|^2 d^3\vec{x}$$

Esempi: • punto materiale:  $I_0 = m |\overline{OP}|^2 = m(x^2 + y^2 + z^2)$



$$I_x = m \text{dist}(P, r_x) = m(y^2 + z^2), \quad I_y = m(x^2 + z^2), \quad I_z = m(x^2 + y^2) \rightarrow I_x + I_y \geq I_z$$

$$I_{xy} = -m \text{dist}(P, \pi_{x=0}) \text{dist}(P, \pi_{y=0}) = -mxy$$

• asta omogenea, con densità di massa lineare  $\rho = \text{cost}$ , lunghezza  $l$ , massa  $M = \rho l$

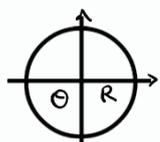


$$I_A = \int_0^l \rho s^2 ds = \frac{1}{3} \rho l^3 = \frac{1}{3} M l^2 = I_r \quad \forall \text{ retta } r \perp AB, \text{ passante per } A$$

$$I_G = \int_{-l/2}^{l/2} \rho s^2 ds = \frac{1}{12} \rho l^3 = \frac{1}{12} M l^2 = I_r \quad \forall \text{ retta } r \perp AB, \text{ passante per } G$$

$$I_A > I_G$$

• disco omogeneo, con densità di massa superficiale  $\rho = \text{cost}$ , raggio  $R$ , massa  $M = \pi \rho R^2$



$$I_0 = \int_D \rho (x^2 + y^2) dx dy = \rho \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 = \frac{\pi}{2} \rho R^4 = \frac{1}{2} M R^2 = I_z \quad \begin{array}{l} z = \text{retta } \perp \text{ disco,} \\ \text{passante per } O = G \end{array}$$

$$I_x = \int_D \rho y^2 dx dy = \rho \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi (r \sin \varphi)^2 = \frac{\pi}{4} \rho R^4 = \frac{1}{4} M R^2 = I_r \quad \begin{array}{l} \forall r = \text{retta } \parallel \text{ disco,} \\ \text{passante per } O \in G \end{array}$$

$$\hookrightarrow I_x + I_y = I_z \rightarrow \text{vero } \forall \text{ corpo piano}$$

Def: Dato un sistema di punti materiali  $\{(P_i, m_i)\}_{i=1, \dots, N}$ , il tensore d'inerzia rispetto a un polo  $Q$  è l'applicazione lineare

$$\mathbb{I}_Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\omega} \mapsto \mathbb{I}_Q \vec{\omega} = \sum_{i=1}^N m_i \overline{QP_i} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{QP_i}) = \sum_{i=1}^N m_i [|\overline{QP_i}|^2 \vec{\omega} - (\overline{QP_i} \cdot \vec{\omega}) \overline{QP_i}]$$

OSS: Per un sistema continuo con densità  $\rho$  si pone

$$\mathbb{I}_Q \vec{\omega} = \int \rho(\vec{x}) (\vec{x} - \vec{x}_Q) \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_Q)] d^3\vec{x} = \int \rho(\vec{x}) [|\vec{x} - \vec{x}_Q|^2 \vec{\omega} - ((\vec{x} - \vec{x}_Q) \cdot \vec{\omega}) (\vec{x} - \vec{x}_Q)] d^3\vec{x}$$

OSS: Il termine "tensore" fa riferimento a proprietà di trasformazione sotto cambio di coord.

Esempio: Rotazioni  $R: \vec{x} \mapsto R\vec{x}$  ( $R$  matrice ortogonale  $R^T R = \mathbb{1}$ )

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_Q \vec{\omega}, \quad T' = \frac{1}{2} \vec{\omega}' \cdot \mathbb{I}'_Q \vec{\omega}' = \frac{1}{2} (R\vec{\omega}) \cdot \mathbb{I}'_Q (R\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot R^T \mathbb{I}'_Q R \vec{\omega}$$

$$\text{energia cinetica} = \text{grandeza scalare invariante} \Rightarrow T = T' \Rightarrow \mathbb{I}_Q = R^T \mathbb{I}'_Q R$$

OSS: Fissato un sist. di rif.  $(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ ,  $\mathbb{I}_O$  è rappresentato da

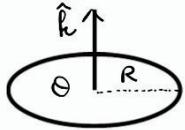
$$(\hat{\mathbb{I}}_O)_{ab} = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \quad I_x + I_y + I_z = 2I_0$$

Nel caso di un sistema piano che giace nel piano  $\langle xy \rangle \perp \hat{k}$  si ha  $z_i = 0 \forall i = 1, \dots, N$ :

$$(\hat{\Pi}_O)_{ob} = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} y_i^2 & -x_i y_i & 0 \\ -x_i y_i & x_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad I_x + I_y = I_z$$

Inoltre,  $\bar{\omega} = \omega \hat{k} = (0 \ 0 \ \omega)^T$ , quindi  $\Pi_O \bar{\omega} = I_z \omega \hat{k} \Rightarrow \boxed{\Pi_O \bar{\omega} = I_z \bar{\omega}}$

Esempio: disco omogeneo di massa  $M$ , raggio  $R$ , centro  $\Theta$  che giace nel piano  $\langle x, y \rangle \perp \hat{k}$



$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_D y^2 d^2\bar{x} = \rho \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi (r \sin \varphi)^2 = \frac{1}{4} MR^2 = I_y \\ I_{xy} &= -\int_D xy d^2\bar{x} = -\rho \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi (r \cos \varphi)(r \sin \varphi) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{\Pi}_\Theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} MR^2 \end{pmatrix}$$

Proposizione: Il tensore d'inerzia  $\Pi_Q$  rispetto ad un polo  $Q \in E^3$  ed il momento d'inerzia  $I_r$  rispetto alla retta  $r = \{P = Q + \lambda \hat{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}, \hat{u} \in \mathbb{R}^3 \text{ vettore}\}$  sono legati dalla relazione

$$\boxed{I_r = \hat{u} \cdot \Pi_Q \hat{u}}$$

dim:  $I_r = \sum_i m_i |(\overline{QP_i} \wedge \hat{u})|^2 = \sum_i m_i (\overline{QP_i} \wedge \hat{u}) \cdot (\overline{QP_i} \wedge \hat{u}) = \sum_i m_i \hat{u} \cdot [(\overline{QP_i} \wedge \hat{u}) \wedge \overline{QP_i}] = \hat{u} \cdot \Pi_Q \hat{u}$   $\blacksquare$

Teorema (Huygens-Steiner) Dato un sistema di punti materiali  $\{(P_i, m_i)\}_{i=1, \dots, N}$  con massa totale  $M$  e cm  $G$ , si ha

HS1)  $\Pi_Q \bar{\omega} = \Pi_G \bar{\omega} + M \overline{QG} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{QG}) \quad \forall Q \in E^3, \bar{\omega} \in \mathbb{R}^3;$   
 HS2)  $I_r = I_{r_G} + M \text{dist}(r, G)^2 \quad \forall r \text{ retta}, r_G = \text{retta} // r, \text{ passante per } G.$

dim: 1)  $\Pi_Q \bar{\omega} = \sum_i m_i \overline{QP_i} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{QP_i}) = \sum_i m_i (\overline{QG} + \overline{GP_i}) \wedge [\bar{\omega} \wedge (\overline{QG} + \overline{GP_i})]$   
 $= \sum_i m_i [\overline{QG} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{QG}) + \overline{QG} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{GP_i}) + \overline{GP_i} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{QG}) + \overline{GP_i} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{GP_i})]$   
 $= M \overline{QG} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{QG}) + \overline{QG} \wedge (\bar{\omega} \wedge M \overline{GG}) + M \overline{GG} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{QG}) + \Pi_G \bar{\omega}$   
 2)  $r = \{P = Q + \lambda \hat{u}\} + \text{proposizione precedente} + \text{HS1}$   
 $\Rightarrow I_r = \hat{u} \cdot \Pi_Q \hat{u} = \hat{u} \cdot [\Pi_G \hat{u} + M \overline{QG} \wedge (\hat{u} \wedge \overline{QG})] = I_{r_G} + M \hat{u} \cdot [\overline{QG} \wedge (\hat{u} \wedge \overline{QG})] = I_{r_G} + M (\hat{u} \wedge \overline{QG}) \cdot (\hat{u} \wedge \overline{QG})$   
 $= I_{r_G} + M \text{dist}(r, G)^2$   $\blacksquare$

Esempi • asta omogenea:  $I_{r_G} = \frac{1}{12} M \ell^2 \rightarrow I_{r_A} = I_{r_G} + M \text{dist}(r_A, G)^2 = \frac{1}{12} M \ell^2 + M \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M \ell^2$

• disco omogeneo:  $I_{r_G} = \frac{1}{2} MR^2 \rightarrow I_{r_H} = I_{r_G} + M \text{dist}(r_H, G)^2 = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$

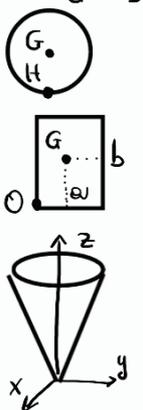
• lastra omogenea:  $I_{r_G} = \int_S \rho |\bar{x} - \bar{x}_G|^2 d^2\bar{x} = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy (x^2 + y^2) = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$

$$I_{r_O} = I_{r_G} + M \text{dist}(r_O, G)^2 = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) + M \left[ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right] = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2)$$

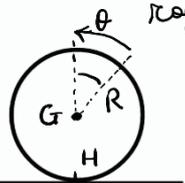
• cono retto omogeneo:  $\Rightarrow G \in \text{ome di simmetria} \equiv \text{ome } \hat{k}$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_S \rho z d^3\bar{x} = \frac{\rho}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \int_0^{hr/R} dz z = \dots = \frac{3}{4} h$$

$$I_{r_G} = \int_S \rho |\bar{x} - \bar{x}_G|^2 d^3\bar{x} = \rho \int_S [x^2 + y^2 + (z - \frac{3}{4}h)^2] d^3\bar{x} = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \int_0^{hr/R} dz [r^2 + (z - \frac{3}{4}h)^2] = \frac{2}{5} M (h^2 + 3R^2)$$



Esercizio: Calcolare le principali grandezze cinematiche per un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  che rotola senza strisciare su un piano orizzontale



Vincolo puro rotolamento  $\Rightarrow \bar{v}_G = -R \dot{\theta} \hat{i}, \bar{\omega} = \dot{\theta} \hat{k}$

Momento di inerzia rispetto ad ome  $// \hat{k}$  passante per  $G$ :  $I_{r_G} = \frac{1}{2} MR^2$

$$\bar{P} = M \bar{v}_G = -MR \dot{\theta} \hat{i}$$

$$\bar{L}_G = \Pi_G \bar{\omega} = I_{r_G} \dot{\theta} \hat{k} = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta} \hat{k}$$

$$\bar{L}_Q = \overline{QG} \wedge M \bar{v}_Q + \Pi_Q \bar{\omega} \left\{ \begin{aligned} \bar{L}_H &= (R \hat{j}) \wedge (M \bar{v}_H) + I_{r_G} \dot{\theta} \hat{k} = (I_{r_G} + MR^2) \dot{\theta} \hat{k} = \frac{3}{2} MR^2 \dot{\theta} \hat{k} \quad (H \in \mathcal{E}) \\ \bar{L}_O &= \overline{OG} \wedge (M \bar{v}_O) + I_{r_O} \dot{\theta} \hat{k} = (I_{r_G} + M(R^2 + x_G^2)) \dot{\theta} \hat{k} \end{aligned} \right.$$

$$T = \frac{1}{2} M |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathbb{I}_G \bar{\omega} = \frac{1}{2} M (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta} \mathbb{I}_{r_G} \dot{\theta} = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} MR^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} MR^2 \dot{\theta}^2$$

Sistema di forze esterne  $\mathcal{F}^{(est)} = \{ (G, \vec{F}_g), (H, \vec{\Phi}), (G, \vec{\mu}_c) \}$  con  $\vec{\mu}_c =$  momento generato da una coppia di forze in G

$$\vec{R}^{(est)} = \vec{F}_g + \vec{\Phi} = -mg\hat{j} + (\Phi_x \hat{i} + \Phi_y \hat{j}) = \Phi_x \hat{i} + (\Phi_y - mg)\hat{j}$$

$$\vec{M}_G^{(est)} = \vec{r}_{G1} \wedge \vec{F}_g + \vec{r}_{G2} \wedge \vec{\Phi} + \vec{\mu}_G = (-R\hat{j}) \wedge (\Phi_x \hat{i} + \Phi_y \hat{j}) + \mu_G \hat{k} = (R\Phi_x + \mu_G) \hat{k}$$

$$\vec{M}_H^{(est)} = \vec{M}_G^{(est)} + \vec{r}_{HG} \wedge \vec{R}^{(est)} = (R\Phi_x + \mu_G) \hat{k} + R\hat{j} \wedge [\Phi_x \hat{i} + (\Phi_y - mg)\hat{j}] = (R\Phi_x + \mu_G - R\Phi_x) \hat{k} = \mu_G \hat{k}$$

$$ECD: \vec{R}^{(est)} = \dot{\vec{P}} = \frac{d}{dt} (-MR\dot{\theta}\hat{i}) = -MR\ddot{\theta}\hat{i} \Rightarrow \Phi_x = -MR\ddot{\theta}, \Phi_y = mg$$

$$\vec{M}_Q^{(est)} = \vec{L}_Q + \vec{r}_{P1} \wedge \vec{v}_Q \rightarrow \vec{M}_G^{(est)} = \vec{L}_G + (M\vec{v}_G) \wedge \vec{v}_G = \frac{1}{2} MR^2 \ddot{\theta} \hat{k} \Rightarrow R\Phi_x + \mu_G = \frac{1}{2} MR^2 \ddot{\theta} \Rightarrow \mu_G = \frac{3}{2} MR^2 \ddot{\theta}$$

$$\rightarrow \vec{M}_H^{(est)} = \vec{L}_H + (M\vec{v}_G) \wedge \vec{v}_H = \frac{3}{2} MR^2 \ddot{\theta} \hat{k} \Rightarrow \mu_G = \frac{3}{2} MR^2 \ddot{\theta}$$

$$Esempio: \mu_G = cost, \theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0, \ddot{\theta} = \frac{2\mu_G}{3MR^2} \Rightarrow \theta(t) = \frac{\mu_G}{3MR^2} t^2$$

Proposizione: Il tensore d'inerzia  $\mathbb{I}_Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un'applicazione lineare, simmetrica (rispetto al prodotto scalare canonico di  $\mathbb{R}^3$ ), positiva:

$$\mathbb{I}_Q(\alpha\bar{\omega} + \beta\bar{\sigma}) = \alpha\mathbb{I}_Q\bar{\omega} + \beta\mathbb{I}_Q\bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} \cdot (\mathbb{I}_Q\bar{\omega}) = (\mathbb{I}_Q\bar{\sigma}) \cdot \bar{\omega}, \quad \bar{\omega} \cdot (\mathbb{I}_Q\bar{\omega}) \geq 0 \quad \forall \bar{\omega}, \bar{\sigma} \in \mathbb{R}^3$$

dim: Linearità è ovvio conseguenza della definizione.

$$\bar{\sigma} \cdot (\mathbb{I}_Q\bar{\omega}) = \bar{\sigma} \cdot \sum_i m_i [|\vec{Q}P_i|^2 \bar{\omega} - (\vec{Q}P_i \cdot \bar{\omega}) \vec{Q}P_i] = \sum_i m_i [|\vec{Q}P_i|^2 \bar{\sigma} \cdot \bar{\omega} - (\vec{Q}P_i \cdot \bar{\sigma})(\vec{Q}P_i \cdot \bar{\omega})] = \bar{\omega} \cdot (\mathbb{I}_Q\bar{\sigma})$$

$$\bar{\omega} \cdot (\mathbb{I}_Q\bar{\omega}) = \sum_i m_i [|\vec{Q}P_i|^2 |\bar{\omega}|^2 - (\vec{Q}P_i \cdot \bar{\omega})^2] = \sum_i m_i |\vec{Q}P_i|^2 |\bar{\omega}|^2 [1 - (\cos\theta_i)^2] \geq 0$$

Teorema:  $\mathbb{I}_Q$  è diagonalizzabile, cioè  $\exists \{ \bar{e}_\omega \}_{\omega=1,2,3}$  base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori di  $\mathbb{I}_Q$ , con autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$  t.c.

$$\mathbb{I}_Q \bar{e}_\omega = \lambda_\omega \bar{e}_\omega \quad \omega = 1, 2, 3$$

dim: La tesi è conseguenza delle proprietà dimostrate nella proposizione precedente e del Teorema spettrale reale.

Def: Le rette identificate dagli autovettori del tensore d'inerzia sono detti assi principali d'inerzia. I relativi autovalori sono detti momenti principali d'inerzia. Se il polo di riferimento è il cdm, si parla di assi e momenti principali "centrali".

OSS: Usando la base di autovettori  $\{ \bar{e}_\omega \}_{\omega=1,2,3}$ , l'azione di  $\mathbb{I}_Q$  è più semplice

$$\forall \bar{\omega} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \bar{\omega} = \sum_{\omega=1}^3 (\bar{\omega} \cdot \bar{e}_\omega) \bar{e}_\omega \rightarrow \mathbb{I}_Q \bar{\omega} = \sum_{\omega=1}^3 (\bar{\omega} \cdot \bar{e}_\omega) \mathbb{I}_Q \bar{e}_\omega = \sum_{\omega=1}^3 \lambda_\omega (\bar{\omega} \cdot \bar{e}_\omega) \bar{e}_\omega$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_Q \bar{\omega} = \lambda_1 (\bar{\omega} \cdot \bar{e}_1) \bar{e}_1 + \lambda_2 (\bar{\omega} \cdot \bar{e}_2) \bar{e}_2 + \lambda_3 (\bar{\omega} \cdot \bar{e}_3) \bar{e}_3$$

OSS: Dato un generico sist. di rif.  $S = (Q, \{ \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3 \})$ , la matrice rappresentativa di  $\mathbb{I}_Q$  è

$$(\hat{\mathbb{I}}_Q)_{ij} = \bar{b}_i \cdot (\mathbb{I}_Q \bar{b}_j) \leftrightarrow \hat{\mathbb{I}}_Q = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

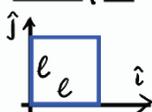
Scegliendo  $S^* = (Q, \{ \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \}) = \{ \text{autovettori di } \mathbb{I}_Q \}$  si ha

$$(\hat{\mathbb{I}}_Q^*)_{ab} = \bar{e}_a \cdot (\mathbb{I}_Q \bar{e}_b) = \lambda_b \bar{e}_a \cdot \bar{e}_b = \lambda_b \delta_{ab} \leftrightarrow \hat{\mathbb{I}}_Q^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Le matrici  $\hat{\mathbb{I}}_Q, \hat{\mathbb{I}}_Q^*$  sono collegate da una trasformazione ortogonale  $R \in O(3)$

$$\hat{\mathbb{I}}_Q^* = R^T \hat{\mathbb{I}}_Q R \leftrightarrow (\hat{\mathbb{I}}_Q^*)_{ab} = \sum_{ij} (R^T)_{ai} (\hat{\mathbb{I}}_Q)_{ij} (R)_{jb} \quad \text{con } R_{jb} = \bar{b}_j \cdot \bar{e}_b$$

Esempio: Lamina omogenea quadrata di lato  $l$  e massa totale  $M$ , con polo in un vertice

$$I_{11} = I_x = \int_S \rho (y^2 + z^2) d^3x = \rho \int_0^l dx \int_0^l dy y^2 = \rho \cdot l \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} M l^2 = I_y = I_{22}$$


$$I_{12} = - \int \rho xy d^3\bar{x} = - \rho \int_0^l dx \int_0^l dy xy = - \rho \frac{l^2}{2} \frac{l^2}{2} = - \frac{1}{4} M l^2 = I_{21}$$

$$I_{13} = - \int \rho xz d^3\bar{x} = 0 = I_{31}$$

$$I_{23} = - \int \rho yz d^3\bar{x} = 0 = I_{32}$$

$$I_{33} = I_2 = \int \rho (x^2 + y^2) d^3\bar{x} = I_{11} + I_{22} = \frac{2}{3} M l^2$$

$$\Rightarrow \hat{\Pi}_0 = M l^2 \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

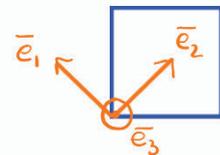
$$\text{Autovalori: } 0 = \det(\hat{\Pi}_0 - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} M l^2 - \lambda & -\frac{1}{4} M l^2 & 0 \\ -\frac{1}{4} M l^2 & \frac{1}{3} M l^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} M l^2 - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{3} M l^2 - \lambda\right) \left[ \left(\frac{1}{3} M l^2 - \lambda\right)^2 - \left(-\frac{1}{4} M l^2\right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{7}{12} M l^2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{12} M l^2, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3} M l^2$$

$$\text{Autovettori: } \hat{\Pi}_0 \bar{\omega} = \lambda_1 \bar{\omega} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \frac{7}{12} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Pi}_0 \bar{\omega} = \lambda_2 \bar{\omega} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Pi}_0 \bar{\omega} = \lambda_3 \bar{\omega} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\omega}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



NB:  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  terna sinistra  
 $\left. \begin{matrix} \bar{e}_1' = \bar{e}_2 \\ \bar{e}_2' = \bar{e}_1 \\ \bar{e}_3' = \bar{e}_3 \end{matrix} \right\}$  terna destra

Def: Fissato un sistema di riferimento  $(Q, \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\})$ , è detto ellissoide di inerzia il luogo geometrico definito come

$$E_Q = \{ \bar{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{x} \cdot \hat{\Pi}_Q \bar{x} = 1 \}$$

OSS: Esplicitamente:  $e_Q(x, y, z) = I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 + 2I_{12}xy + 2I_{23}yz + 2I_{31}zx - 1 = 0$   
 $\Rightarrow E_Q = \{ \text{zeri di } e_Q = \text{funzione quadratica} \}$

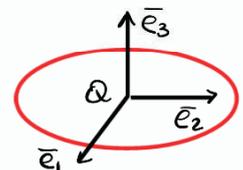
OSS: Equivalentemente:  $I_{\hat{x}} = \hat{x} \cdot \hat{\Pi}_Q \hat{x} = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \cdot \hat{\Pi}_Q \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \frac{1}{|\bar{x}|^2} \rightarrow |\bar{x}| = \frac{1}{\sqrt{I_{\hat{x}}}}$

$$\hookrightarrow E_Q = \{ \bar{x} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{I_{\hat{u}}}} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{u} \in \text{sfera di raggio } 1 \}$$

OSS: Scegliendo come riferimento gli assi principali d'inerzia si ha

$$1 = \bar{X} \cdot \hat{\Pi}_Q^* \bar{X} = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 \Rightarrow \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{Ponendo } a = 1/\sqrt{\lambda_1}, \quad b = 1/\sqrt{\lambda_2}, \quad c = 1/\sqrt{\lambda_3}$$



$a, b, c = \text{semiasse}$

Casistica: •  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \Rightarrow \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  ortogonali, univocamente determinati

$E_Q = \text{ellissoide simmetrico.}$

•  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \Rightarrow \bar{e}_3$  univoco,  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$  qualunque coppia  $\perp \bar{e}_3$

$E_Q = \text{ellissoide di rotazione con asse di simmetria } \bar{e}_3$

•  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow \hat{\Pi}_Q^* = \lambda \mathbb{1} \Rightarrow (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  qualsiasi terna ortogonale

$E_Q = \text{ellissoide completamente simmetrico} = \text{sfera di raggio } 1/\sqrt{\lambda}$

•  $0 = \lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow a = \infty, b = c = 1/\sqrt{\lambda_2} \Rightarrow \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$  (eq. iperbolica)

$E_Q$  degenera in un cilindro infinito

•  $0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow a = b = c = \infty$  (eq. punto materiale)

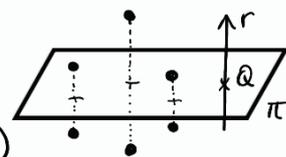
$E_Q$  degenera in una sfera di raggio infinito

} casi degeneri

Proposizione (Simmetrie e assi principali d'inerzia): Dato un sistema di punti materiali  $\{(P_i, m_i)\}$  con un piano di simmetria materiale  $\pi$ , si ha che ogni asse  $r \perp \pi$  è asse principale di inerzia rispetto al polo  $Q = r \cap \pi$ .

dim: Sia  $(Q, \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\})$  sist. di ref. con  $Q \in \pi, \hat{i}, \hat{j} \parallel \pi, \hat{k} \perp \pi$

$\hookrightarrow$  Per dimostrare la tesi, basta verificare che  $\hat{\Pi}_Q \hat{k} = \lambda \hat{k} (\lambda > 0)$



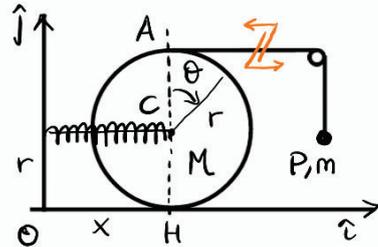
$\pi =$  piano di simm. materiale  $\rightarrow J_0 = \{i=1, \dots, N | z_i=0\}$ ,  $J_{\pm} = \{i=1, \dots, N | \pm z_i > 0\}$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} I_{xz} &= -\sum_i m_i x_i z_i = -\sum_{i \in J_0} m_i x_i z_i - \sum_{i \in J_+} m_i x_i z_i - \sum_{i \in J_-} m_i x_i z_i = 0 \\ I_{yz} &= \dots = 0 \\ I_{zz} &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) > 0 \end{aligned} \right\} \mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathbb{I}_Q \hat{k} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zz} \end{pmatrix} = I_{zz} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = I_{zz} \hat{k} \Rightarrow \hat{k} =$  *asse principale.*

Esempio: Corpo rigido piano  $\Rightarrow \pi =$  piano che contiene il corpo è piano di simm. materiale  
 $\Rightarrow \forall$  *asse*  $r \perp \pi$  è *asse principale* d'inercia rispetto al polo  $Q = r \cap \pi$ .

Esercizio: Studiare la dinamica del sistema rappresentato in figura, composto da



- disco omogeneo di raggio  $r$ , massa  $M$ , centro  $C \rightarrow$  puro rotolamento
- punto materiale  $P$  di massa  $m$ , collegato a filo inestensibile di massa trascurabile che poggia per un piolo liscio posto ad altezza  $2r$  e che si avvolge senza strisciare sul disco
- molla ideale di costante elastica  $k$  che collega  $C$  all'asse  $\hat{j}$ .

Determinare: 1) eq. diff. pure per il sistema;  
 2) Moto a partire da config. iniziale di quiete con molla a riposo e filo teso;  
 3) Reazioni vincolari.

$x = x_H$  (ascissa pt. appoggio) =  $x_C$  (ascissa centro del disco)

$\theta =$  angolo di orientazione del disco, misurato in senso orario a partire dalla verticale.

$y = 2r - y_P =$  distanza di  $P$  dal piolo.

Puro rotolamento  $\Rightarrow \dot{x} = r\dot{\theta} \Rightarrow \dot{x}_C = r\dot{\theta}\hat{i} \Rightarrow \dot{x}_A = \dot{x}_C + \bar{\omega} \wedge \bar{CA} = 2r\dot{\theta}\hat{i} = 2\dot{x}\hat{i}$   
 Filo inestensibile  $\Rightarrow |\bar{v}_P| = |\bar{v}_A| \Rightarrow \bar{v}_P = -|\bar{v}_P|\hat{j} = -|\bar{v}_A|\hat{j} = -2r\dot{\theta}\hat{j} = -2\dot{x}\hat{j}$  }  $\hookrightarrow \# \text{gdL} = 3 - 2 = 1$

1) Teorema dell'energia cinetica:  $\dot{T} = \Pi^{(ext)}$

$$\left. \begin{aligned} T_{(disco)} &= \frac{1}{2} M |\bar{v}_C|^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathbb{I}_C \bar{\omega} = \frac{1}{2} M (r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M r^2\right) \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} M r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} M \dot{x}^2 \\ T_P &= \frac{1}{2} m |\bar{v}_P|^2 = \frac{1}{2} m (-2r\dot{\theta})^2 = 2m r^2 \dot{\theta}^2 = 2m \dot{x}^2 \end{aligned} \right\} T = T_{(d)} + T_P = \left(\frac{3}{4} M + 2m\right) \dot{x}^2$$

$$\Pi^{(ext)} = \bar{F}_{el} \cdot \bar{v}_C + \bar{F}_c \cdot \bar{v}_C + \bar{F}_P \cdot \bar{v}_P = (-kx\hat{i}) \cdot (\dot{x}\hat{i}) + (-Mg\hat{j}) \cdot (\dot{x}\hat{i}) + (-mg\hat{j}) \cdot (-2\dot{x}\hat{j}) = -kx\dot{x} + 2mg\dot{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4} M + 2m\right) 2\dot{x}\ddot{x} = -kx\dot{x} + 2mg\dot{x} \Rightarrow \dot{x} \left[ \left(\frac{3}{2} M + 4m\right) \ddot{x} + kx - 2mg \right] = 0$$

2)  $\dot{x} = 0 \rightarrow$  se  $x(0) = x_0$  corrisponde a equilibrio, allora  $x(t) = x_0 \forall t$  è soluzione di quiete  
 (Esercizio: verificare che  $x_0 = 2mg/k$  è un equilibrio)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{3}{2} M + 2m\right) \ddot{x} + kx - 2mg = 0 \rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{\frac{3}{2} M + 2m} \left(x - \frac{2mg}{k}\right) \\ \hookrightarrow x(t) = \frac{2mg}{k} + \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{\frac{3}{2} M + 2m}} \\ x(0) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{2mg}{k}; \quad \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0 \end{aligned} \right\} x(t) = \frac{2mg}{k} (1 - \cos \omega t)$$

3) Analizziamo disco e punto materiale separatamente, tagliando idealmente il filo e applicando una coppia di forze per tenere uniti gli estremi così ottenuti

• Disco:  $\mathcal{M}^{(ext)} = \{(C, \bar{F}_c + \bar{F}_{el}), (A, \bar{\tau}), (H, \bar{\Phi})\}$ ,  $\bar{F}_c = -Mg\hat{j}$ ,  $\bar{F}_{el} = -kx\hat{i}$ ,  $\bar{\tau} = \tau\hat{i}$ ,  $\bar{\Phi} = \Phi_x\hat{i} + \Phi_y\hat{j}$

$$\bar{P} = M\bar{v}_C = M\dot{x}\hat{i} \rightarrow M\ddot{x}\hat{i} = \dot{\bar{P}} = \bar{R}^{(ext)} = (-kx + \tau + \Phi_x)\hat{i} + (-Mg + \Phi_y)\hat{j}$$

$$\Rightarrow \Phi_x + \tau = M\ddot{x} + kx, \quad \Phi_y = Mg$$

$$\bar{L}_C = \bar{C} \wedge M\bar{v}_C + \mathbb{I}_C \bar{\omega} = \left(\frac{1}{2} M r^2\right) (-\dot{\theta}\hat{k}) = -\frac{1}{2} M r \dot{x} \hat{k}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2} M r \ddot{x} \hat{k} = \dot{\bar{L}}_C = \bar{M}_C^{(ext)} + \bar{P} \wedge \bar{v}_C = \bar{C} \wedge (\bar{F}_c + \bar{F}_{el}) + \bar{CA} \wedge \bar{\tau} + \bar{CH} \wedge \bar{\Phi} = -r\tau\hat{k} + r\Phi_x\hat{k}$$

$$\Rightarrow \Phi_x - \tau = -\frac{1}{2} M \ddot{x}$$

• Punto:  $\mathcal{R}^{(est)} = \{(\bar{P}, \bar{F}_P + \bar{\tau}')\}$ ,  $\bar{F}_P = -mg\hat{j}$ ,  $\bar{\tau}' = \tau\hat{j}$   
 $\bar{P} = m\bar{v}_P = -2m\dot{x}\hat{j} \rightarrow -2m\ddot{x}\hat{j} = \dot{\bar{P}} = \bar{R}^{(est)} = (-mg + \tau)\hat{j} \Rightarrow \tau = mg - 2m\ddot{x}$   
 Riepitolando: 
$$\begin{cases} \tau = m(g - 2\ddot{x}) \\ \phi_x = m(g - 2\ddot{x}) - \frac{1}{2}M\ddot{x} & \text{con } (\frac{3}{2}M + 4m)\ddot{x} + kx - 2mg = 0 \\ \phi_y = Mg \end{cases}$$

### 5.3.2) Equazioni di Eulero

Si ricordi che nel caso di un corpo rigido, momento angolare ed energia cinetica sono dati dalle relazioni seguenti ( $\Theta = pt.$  generico,  $Q = pt.$  solidale al corpo rigido,  $G = cdm$ ):

$$\left. \begin{aligned} \bar{L}_O &= \bar{L}_Q + \overline{OQ} \wedge \bar{P} \\ \bar{L}_Q &= \overline{QG} \wedge M\bar{v}_Q + \Pi_G \bar{\omega} \\ T &= \frac{1}{2}M|\bar{v}_Q|^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega} \Pi_G \bar{\omega} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \bar{L}_O &= \bar{L}_G + \overline{OG} \wedge \bar{P}, & \bar{L}_G &= \Pi_G \bar{\omega} \\ T &= \frac{1}{2}M|\bar{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega} \cdot \bar{L}_G \end{aligned}$$

Proposizione: Il momento angolare di un corpo rigido rispetto al cdm  $G$  soddisfa

$$\boxed{\dot{\bar{L}}_G = \Pi_G \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \wedge \Pi_G \bar{\omega}}$$

dim:  $G = cdm$  solidale con corpo rigido + Teo Rivals  $\Rightarrow \bar{G}P_i = \bar{v}_i - \bar{v}_G = \bar{\omega} \wedge \bar{G}P_i \quad \forall i = 1, \dots, N$   

$$\begin{aligned} \dot{\bar{L}}_G &= \frac{d}{dt}(\Pi_G \bar{\omega}) = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \bar{G}P_i \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{G}P_i) = \sum_i m_i [\dot{\bar{G}}P_i \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{G}P_i) + \bar{G}P_i \wedge (\dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{G}P_i) + \bar{G}P_i \wedge (\bar{\omega} \wedge \dot{\bar{G}}P_i)] \\ &= \sum_i m_i (\underbrace{\dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{G}P_i}_a) \wedge (\underbrace{\bar{\omega} \wedge \bar{G}P_i}_b) + \Pi_G \dot{\bar{\omega}} + \sum_i m_i \bar{G}P_i \wedge [\underbrace{\bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{G}P_i)}_c] = [\text{identità di Jacobi}] \\ &= \Pi_G \dot{\bar{\omega}} + \sum_i m_i \left\{ -\bar{\omega} \wedge [(\bar{\omega} \wedge \bar{G}P_i) \wedge \bar{G}P_i] - (\bar{\omega} \wedge \bar{G}P_i) \wedge [\bar{G}P_i \wedge \bar{\omega}] \right\} \\ &= \Pi_G \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \wedge \sum_i m_i \bar{G}P_i \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{G}P_i) = \Pi_G \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \wedge \Pi_G \bar{\omega} \end{aligned}$$

OSS:  $\Theta \in E^3$  generico  $\Rightarrow \dot{\bar{L}}_O = \frac{d}{dt}(\bar{L}_G + \overline{OG} \wedge \bar{P}) = \Pi_G \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \wedge \Pi_G \bar{\omega} + (\bar{v}_G - \bar{v}_O) \wedge \bar{P} + \overline{OG} \wedge \dot{\bar{P}}$   
 $= \Pi_G \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \wedge \Pi_G \bar{\omega} - \bar{v}_O \wedge \bar{P} + \overline{OG} \wedge \bar{R}^{(est)}$   
 NB:  $\bar{v}_O = \bar{0} \Leftrightarrow (\Theta \text{ fisso}) \vee (\text{adm rotatorio e } \Theta \in \text{ome di Mozzi})$

OSS: Corpo rigido piano  $\subset \pi \Rightarrow G \in \pi \Rightarrow \Pi_G \bar{\omega} = I_z \bar{\omega}$  (con  $z = \text{ome} \perp \pi$ )  
 $\Rightarrow \bar{\omega} \wedge \Pi_G \bar{\omega} = I_z \bar{\omega} \wedge \bar{\omega} = \bar{0} \Rightarrow \dot{\bar{L}}_G = \Pi_G \dot{\bar{\omega}} = I_z \dot{\bar{\omega}}$

Teorema (Equazioni di Eulero): Con le ipotesi  $[H_0][H_1]$ , le ECD per un corpo rigido sono

$$\boxed{\text{(I)} M\bar{a}_G = \bar{R}^{(est)} \quad \text{(II)} \Pi_G \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \wedge \Pi_G \bar{\omega} = \bar{M}_G^{(est)}}$$

dim:  $\dot{\bar{P}} = \bar{R}^{(est)}$  con  $\bar{P} = M\bar{v}_G \Rightarrow M\bar{a}_G = M\dot{\bar{v}}_G = \dot{\bar{P}} = \bar{R}^{(est)}$   
 $\dot{\bar{L}}_Q = \bar{M}_Q^{(est)} + \bar{P} \wedge \bar{v}_Q$  con  $Q = G$  e prop. precedente  $\Rightarrow \Pi_G \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \wedge \Pi_G \bar{\omega} = \dot{\bar{L}}_G = \bar{M}_G^{(est)} + \overline{M\bar{v}_G} \wedge \bar{v}_G$

OSS: Scegliendo come termine di riferimento gli assi principali d'inertia  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  ed indicando con  $\omega_i = \bar{\omega} \cdot \bar{e}_i$ ,  $\bar{M}_G^{(est)} = \bar{M}_G^{(est)} \cdot \bar{e}_i$  le componenti di  $\bar{\omega}$  e  $\bar{M}^{(est)}$  rispetto a questa base, si ha  

$$\Pi_G \bar{\omega} = \Pi_G(\omega_1 \bar{e}_1 + \omega_2 \bar{e}_2 + \omega_3 \bar{e}_3) = I_1 \omega_1 \bar{e}_1 + I_2 \omega_2 \bar{e}_2 + I_3 \omega_3 \bar{e}_3 \quad (I_i = \text{momenti principali d'inertia})$$
  

$$\Rightarrow \bar{\omega} \wedge \Pi_G \bar{\omega} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_1 \omega_1 & I_2 \omega_2 & I_3 \omega_3 \end{vmatrix} = -(I_2 - I_3)\omega_2 \omega_3 \bar{e}_1 - (I_3 - I_1)\omega_3 \omega_1 \bar{e}_2 - (I_1 - I_2)\omega_1 \omega_2 \bar{e}_3$$

ECD<sub>II</sub> 
$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2 \omega_3 + M_1^{(est)} \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3 \omega_1 + M_2^{(est)} \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1 \omega_2 + M_3^{(est)} \end{cases}$$
 Equazioni di Eulero  
 NB: il sistema di riferimento usato generalmente non è inerziale

OSS:  $\bar{\omega}$  = velocità angolare esprimibile tramite le derivate temporali degli angoli di Eulero  
 $\Rightarrow$  ECS = 6 eq diff ordinarie del secondo ordine in 6 incognite ( $x_G, y_G, z_G, \psi, \theta, \varphi$ )  
 (NB: generalmente accoppiate tramite  $\bar{R}^{(est)}, \bar{M}_G^{(est)}$ )  
 = condizioni necessarie e sufficienti per determinare la dinamica.

OSS: In  $ECD_{II}, ECD_{II}^I$  compaiono solo:

- $\bar{R}^{(est)}, \bar{M}_Q^{(est)}$  = risultanti forze esterne
- $M, I_1, I_2, I_3$  = massa totale e momenti principali

⇒ Stessa dinamica per tutti i corpi rigidi con stessa massa e stessi momenti principali su cui agiscono sistemi di forze equivalenti.

OSS: Le forze interne NON influenzano la dinamica, neanche indirettamente perché il vincolo di rigidità impedisce cambiamenti di forma del sistema.

Teorema dell'ergia cinetica: Assumendo  $[H_0][H_1]$ , l'energia cinetica di un corpo rigido  $\mathcal{C}$  soddisfa

$$\dot{T} = \bar{R}^{(est)} \cdot \bar{v}_Q + \bar{M}_Q^{(est)} \cdot \bar{\omega} \quad \forall Q \in \mathcal{C}$$

dim: Teorema Rivals  $\Rightarrow \bar{v}_i = \bar{v}_Q + \bar{\omega} \wedge \overline{QP_i} \quad \forall Q, P_i \in \mathcal{C}$

$$\Rightarrow \dot{T} = \dot{\Pi} = \sum_i \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i = \sum_i \bar{F}_i \cdot (\bar{v}_Q + \bar{\omega} \wedge \overline{QP_i}) = (\sum_i \bar{F}_i) \cdot \bar{v}_Q + \sum_i \bar{F}_i \cdot (\bar{\omega} \wedge \overline{QP_i}) = \bar{R} \cdot \bar{v}_Q + \sum_i \bar{\omega} \cdot (\overline{QP_i} \wedge \bar{F}_i)$$

$$= \bar{R} \cdot \bar{v}_Q + \bar{\omega} \cdot \bar{M}_Q = (\bar{R}^{(int)} + \bar{R}^{(est)}) \cdot \bar{v}_Q + (\bar{M}_Q^{(int)} + \bar{M}_Q^{(est)}) \cdot \bar{\omega} = \bar{R}^{(est)} \cdot \bar{v}_Q + \bar{M}_Q^{(est)} \cdot \bar{\omega}$$

dim (alternativa per  $Q=G=cdm$ )

$$\dot{T} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} M |\bar{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \bar{L}_G \cdot \bar{\omega} \right] = \frac{1}{2} M 2 \bar{v}_G \cdot \dot{\bar{v}}_G + \frac{1}{2} \dot{\bar{L}}_G \cdot \bar{\omega} + \frac{1}{2} \bar{L}_G \cdot \dot{\bar{\omega}} = M \bar{v}_G \cdot \dot{\bar{v}}_G + \bar{\omega} \cdot \dot{\bar{L}}_G \stackrel{ECS}{=} \bar{v}_G \cdot \bar{R}^{(est)} + \bar{\omega} \cdot \bar{M}_G^{(est)}$$

$$\dot{\bar{L}}_G \cdot \bar{\omega} = [\bar{\Pi}_G \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \wedge \bar{\Pi}_G \bar{\omega}] \cdot \bar{\omega} = (\bar{\Pi}_G \dot{\bar{\omega}}) \cdot \bar{\omega} = \dot{\bar{\omega}} \cdot (\bar{\Pi}_G \bar{\omega}) = \dot{\bar{\omega}} \cdot \bar{L}_G$$

OSS: Ipotesi  $[H_0][H_1]$  + corpo rigido  $\Rightarrow$  forze interne non compiono lavoro

$P_i \xrightarrow{\bar{F}_{ij}} \bar{F}_{ji} \xleftarrow{} P_j \Rightarrow \bar{F}_{ij} \cdot \bar{v}_i + \bar{F}_{ji} \cdot \bar{v}_j = \bar{F}_{ij} \cdot (\bar{v}_i - \bar{v}_j) = \bar{F}_{ij} \cdot (\bar{\omega} \wedge \overline{P_i P_j}) = \bar{\omega} \cdot (\overline{P_i P_j} \wedge \bar{F}_{ij}) = 0$

$\Rightarrow \dot{\Pi} = \dot{\Pi}^{(est)} + \dot{\Pi}^{(int)} = \dot{\Pi}^{(est, A)} + \dot{\Pi}^{(est, V)}$

### 5.3.3) Moti alla Poincaré

Def: Il moto di un corpo rigido è detto "alla Poincaré" (o "per inerzia") se esiste un punto  $Q \in \mathcal{C}$  fisso o coincidente con cdm t.c.

$$\bar{M}_Q^{(est)} = \bar{M}_Q^{(est, A)} + \bar{M}_Q^{(est, V)} = \bar{0}$$

OSS: In un moto alla Poincaré la dinamica del cdm e quella di rotazione si scoppiano. La dinamica rotazionale può essere risolta indipendentemente dal moto del cdm.

1. Risolvendo  $\bar{\Pi}_G \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \wedge \bar{\Pi}_G \bar{\omega} = \bar{0}$  si determinano  $\psi(t), \theta(t), \varphi(t)$ ;
2. Risolvendo  $M \ddot{x}_G = \bar{R}^{(est)}(\bar{x}_G, \dot{x}_G; \psi(t), \theta(t), \varphi(t); t)$  si cerca di determinare  $x_G(t), y_G(t), z_G(t)$

Proposizione: In un moto alla Poincaré di un corpo rigido rispetto ad un polo  $Q \in E^3$  fisso o cdm, il momento angolare rispetto a  $Q$  e l'energia cinetica di rotazione sono costanti del moto.

$$\bar{L}_Q = \bar{\Pi}_Q \bar{\omega} = \bar{L}_Q|_{t=0}, \quad T_Q = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{\Pi}_Q \bar{\omega} = \frac{1}{2} \bar{L}_Q \cdot \bar{\omega} = T_Q|_{t=0}$$

dim:  $ECD_{II} \Rightarrow \dot{\bar{L}}_Q = \bar{M}_Q^{(est)} + \bar{P} \wedge \bar{v}_Q$

$\bar{v}_Q = \bar{0}$  se  $Q$  fisso,  $\bar{P} \wedge \bar{v}_Q = \bar{0}$  se  $Q=cdm$

$\bar{M}_Q^{(est)} = \bar{0}$  per moti alla Poincaré

$\Rightarrow \dot{\bar{L}}_Q = \bar{0} \Rightarrow \bar{L}_Q = \text{cost.} = \bar{L}_Q|_{t=0} = \overline{QGAM} \bar{v}_Q + \bar{\Pi}_Q \bar{\omega} = \bar{\Pi}_Q \bar{\omega}$

•  $Q$  pt. fisso  $\Rightarrow \bar{v}_Q = \bar{0} \Rightarrow T = \frac{1}{2} M |\bar{v}_Q|^2 + M \bar{v}_Q \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{QG}) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{\Pi}_Q \bar{\omega} = T_Q \Rightarrow \dot{T} = 0 \Rightarrow T_Q = \text{cost.}$

Teorema energia cinetica  $\Rightarrow \dot{T} = \dot{\Pi} = \bar{R}^{(e)} \cdot \bar{v}_Q + \bar{M}_Q^{(e)} \cdot \bar{\omega} = 0$

•  $Q=G=cdm \Rightarrow \dot{T}_G = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \bar{L}_G \cdot \bar{\omega} \right) = \frac{1}{2} \dot{\bar{L}}_G \cdot \bar{\omega} + \frac{1}{2} \bar{L}_G \cdot \dot{\bar{\omega}} = \frac{1}{2} \bar{M}_G^{(e)} \cdot \bar{\omega} + \frac{1}{2} (\bar{\Pi}_G \bar{\omega}) \cdot \dot{\bar{\omega}} = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot (\bar{\Pi}_G \dot{\bar{\omega}})$

$ECD_{II} \Rightarrow \bar{\Pi}_G \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \wedge \bar{\Pi}_G \bar{\omega} = \bar{M}_G^{(e)} = \bar{0} \Rightarrow \dot{T}_G = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot (-\bar{\omega} \wedge \bar{\Pi}_G \bar{\omega}) = -\frac{1}{2} \bar{\Pi}_G \bar{\omega} \cdot (\bar{\omega} \wedge \bar{\omega}) = 0$

OSS:  $Q$  pt. fisso  $\Rightarrow T_Q = T =$  energia cinetica

$Q=G=cdm \Rightarrow T_G = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{\Pi}_G \bar{\omega} = T^{(G)} =$  energia cinetica nel sist. di rif. del cdm.



• Usando le costanti del moto  $|\bar{L}_Q|^2 = \sum I_\omega \omega_\omega^2 = l_0^2$ ,  $2T_Q = \sum I_\omega \omega_\omega^2 = 2\tau_0$ , si ottiene

$$2I_3\tau_0 - l_0^2 = I_3(2T_Q) - |\bar{L}_Q|^2 = (I_3 - I_1)I_1\omega_1^2 + (I_3 - I_2)I_2\omega_2^2 = \text{cost.} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2} + \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2} = 1 \text{ con } \omega_1 = \sqrt{\frac{2I_3\tau_0 - l_0^2}{(I_3 - I_1)I_1}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{2I_3\tau_0 - l_0^2}{(I_3 - I_2)I_2}} \Rightarrow (\omega_1, \omega_2) \in \text{ellisse con semiassi piccoli se } |\omega_1(0)|, |\omega_2(0)| \ll 1.$$

•  $|\bar{\omega} - \bar{\omega}_*| < \varepsilon \ll 1 \quad \forall \omega_1(0), \omega_2(0)$  abbastanza piccoli.

• Nel caso  $\bar{\omega}_* = \omega_1 \bar{e}_1$ , i moti simili portano a  $(\omega_2, \omega_3) \in \text{ellisse} \rightarrow \text{stabilit\`a}$   
 " "  $\bar{\omega}_* = \omega_2 \bar{e}_2$ , " " " "  $(\omega_1, \omega_3) \in \text{iperbole} \rightarrow \text{instabilit\`a}$ .  $\blacksquare$

### ► Caso giroscopico ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ )

Eq. Eulero: 
$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_2 \omega_3 \\ \dot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \omega_1 \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_3 = \text{cost.} = \omega_3(0) \\ k_i = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \in \mathbb{R} \\ \dot{\omega}_1 = -k \omega_3(0) \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = k \omega_3(0) \omega_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_3 = \omega_* \\ \dot{\omega}_1 = -(k\omega_*)^2 \omega_1 \\ \omega_2 = -(k\omega_*)^{-1} \dot{\omega}_1 \\ k = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_3 = \omega_* \\ \omega_1(t) = \omega_0 \cos(k\omega_* t + \varphi_0) \\ \omega_2(t) = \omega_0 \sin(k\omega_* t + \varphi_0) \\ k = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \end{cases}$$

Proposizione: In un moto alla Poisson di un giroscopio, la velocità angolare  $\bar{\omega}$  è data da

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{L}_Q}{I_1} - \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_* \bar{e}_3 \quad \textcircled{A}$$

Quindi, sono costanti del moto: •  $\bar{L}_Q =$  momento angolare,  $T_Q \approx$  energia cinetica  
 •  $\bar{\omega} \cdot \bar{L}_Q, \bar{\omega} \cdot \bar{e}_3 =$  proiezioni della velocità angolare  
 •  $|\bar{\omega}| =$  modulo della velocità angolare.

dim:  $\bar{\omega} = \omega_1 \bar{e}_1 + \omega_2 \bar{e}_2 + \omega_3 \bar{e}_3$

$$\bar{L}_Q = \mathbb{I}_Q \bar{\omega} = I_1 \omega_1 \bar{e}_1 + I_2 \omega_2 \bar{e}_2 + I_3 \omega_3 \bar{e}_3 = I_1(\omega_1 \bar{e}_1 + \omega_2 \bar{e}_2 + \omega_3 \bar{e}_3) + (I_3 - I_1)\omega_3 \bar{e}_3 = I_1 \bar{\omega} + k I_1 \omega_* \bar{e}_3 \Rightarrow \textcircled{A}$$

Inoltre: Moto alla Poisson  $\Rightarrow \bar{L}_Q, T_Q, \bar{\omega} \cdot \bar{L}_Q$  costanti del moto

$$\bar{\omega} \cdot \bar{e}_3 = \omega_* = \text{cost.}$$

$$2T_Q = \text{cost} = \bar{\omega} \cdot \mathbb{I}_Q \bar{\omega} = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 = I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_*^2 \Rightarrow \omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{cost.} \Rightarrow |\bar{\omega}| = \text{cost.}$$

Teorema: Nel caso di un giroscopio, tutti i moti alla Poisson rispetto a Q, punto fisso o cdm, sono precessioni regolari con asse di precessione  $\parallel \bar{L}_Q$  e asse di rotazione proprio  $\parallel \bar{e}_3$

dim:  $\textcircled{A} \Rightarrow \frac{|\bar{\omega}|^2}{\text{cost.}} = \left| \frac{\bar{L}_Q}{I_1} - k\omega_* \bar{e}_3 \right|^2 = \frac{|\bar{L}_Q|^2}{I_1^2} + (k\omega_*)^2 |\bar{e}_3|^2 - 2 \frac{k\omega_*}{I_1} \bar{L}_Q \cdot \bar{e}_3 \Rightarrow \bar{L}_Q \cdot \bar{e}_3 = \text{cost.}$

$$\bar{L}_Q = \text{cost.} \Rightarrow |\bar{L}_Q| = \text{cost.}, |\bar{e}_3| = 1 = \text{cost.} \Rightarrow \cos \gamma = \frac{\bar{L}_Q \cdot \bar{e}_3}{|\bar{L}_Q| |\bar{e}_3|} = \text{cost.}$$

OSS:  $\bar{L}_Q = \text{cost.}, |\bar{\omega}| = \text{cost.}, \bar{L}_Q \cdot \bar{\omega} = \text{cost.} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\bar{L}_Q \cdot \bar{\omega}}{|\bar{L}_Q| |\bar{\omega}|} = \text{cost.} \Rightarrow \alpha = \text{cost.}$

$$|\bar{e}_3| = 1, |\bar{\omega}| = \text{cost.}, \bar{\omega} \cdot \bar{e}_3 = \omega_* = \text{cost.} \Rightarrow \cos \beta = \frac{\bar{e}_3 \cdot \bar{\omega}}{|\bar{e}_3| |\bar{\omega}|} = \text{cost.} \Rightarrow \beta = \text{cost.}$$

$\Rightarrow$  L'asse di istantanea rotazione descrive:

- un cono di semi-apertura  $\alpha$  con asse  $\parallel \bar{L}_Q$  (cono fisso  $\mathcal{E}_1$ )
- un cono di semi-apertura  $\beta$  con asse  $\parallel \bar{e}_3$  (cono mobile  $\mathcal{E}_2$ )

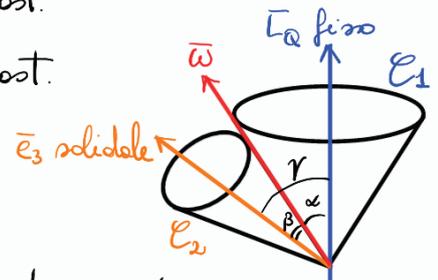
NB:  $\bar{\omega}$  non è costante (rotazione attorno all'asse fisso  $\bar{L}_Q$ )

NB: punti di contatto cono fisso/cono mobile = punti su asse di istantanea rotazione

$\hookrightarrow$  velocità nulla

$\Rightarrow$  i coni rotolano uno sull'altro senza strisciare

NB:  $I_3 \leq I_1 + I_2 = 2I_1 \Rightarrow \gamma \geq \alpha \Rightarrow$  cono mobile esterno o cono fisso



Basta dimostrare che  $\cos \gamma \leq \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{\bar{L}_Q \cdot \bar{e}_3}{|\bar{L}_Q| |\bar{e}_3|} \leq \frac{\bar{L}_Q \cdot \bar{\omega}}{|\bar{L}_Q| |\bar{\omega}|} \Leftrightarrow (\bar{L}_Q \cdot \bar{e}_3) |\bar{\omega}| \leq \bar{L}_Q \cdot \bar{\omega}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{L}_Q \cdot \bar{\omega} &= I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_3^2 \\ \bar{L}_Q \cdot \bar{e}_3 &= I_3 \omega_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{L}_Q \cdot \bar{\omega} - (\bar{L}_Q \cdot \bar{e}_3) |\bar{\omega}| = I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_3^2 - I_3 \omega_3 |\bar{\omega}| \stackrel{[I_1 \geq \frac{1}{2} I_3]}{\geq} I_3 \left[ \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \omega_3^2 - \omega_3 |\bar{\omega}| \right] = \frac{1}{2} I_3 (|\bar{\omega}|^2 + \omega_3^2 - 2|\bar{\omega}| \omega_3) = \frac{1}{2} I_3 (|\bar{\omega}| - \omega_3)^2 \geq 0$$

Esempio (Precessione terrestre): Terra = ellissoide (schiacciato ai poli)  $I_1 = I_2 \approx (1 - 4 \cdot 10^{-3}) I_3$   
 Sistema di forze = forze di gravità terra-sole  $\Rightarrow \bar{M}_Q^{(est)} = \bar{0} \rightarrow$  Moto alla Poinsot  
 $Q = G = \text{cdm}$  } giroscopico.  
 $\bar{e}_3 =$  one di rotazione terrestre  $\rightarrow \omega_3 = \bar{\omega} \cdot \bar{e}_3 \approx \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$   
 $\hat{k} = \frac{\bar{L}_Q}{|\bar{L}_Q|} =$  one  $\perp$  piano eclittico  $\rightarrow \bar{\omega} \cdot \hat{k} \approx \frac{2\pi}{26 \cdot 000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} = \frac{\omega_3}{26 \cdot 000 \cdot 365} \approx 8 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$  } Precessione equinozi

Esempio (Rotazioni permanenti): Dato un giroscopio con  $I_1 = I_2 < I_3$ , sono rotazioni permanenti: tutte le rotazioni con one  $\parallel \bar{e}_3$  o one  $\perp \bar{e}_3$ .

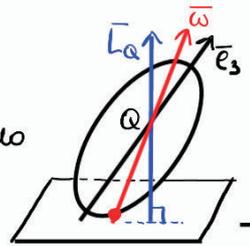
- $\bar{\omega} \sim \omega_3 \bar{e}_3 \rightarrow \bar{\omega}(0) = \bar{\omega}_1(0) + \omega_3(0) \bar{e}_3$  con  $\bar{\omega}_1(0) \perp \bar{e}_3$ ,  $|\bar{\omega}_1(0)| < \delta = \epsilon/2$   
 $\Rightarrow \omega_3(t) = \text{cost.} = \omega_*$ ,  $\bar{\omega}_1(t) = R(t) \bar{\omega}_1(0) \Rightarrow |\bar{\omega}_1(t) - \bar{\omega}_1(0)| = |(R(t) - 1) \bar{\omega}_1(0)| \leq 2 |\bar{\omega}_1(0)| < \epsilon$  stabile
- $\bar{\omega} \sim \omega_1 \bar{e}_1 \rightarrow \bar{\omega}(0) = \omega_1(0) \bar{e}_1 + \omega_3(0) \bar{e}_3$  con  $\omega_3(0) = \delta \ll 1$   
 $\Rightarrow \omega_3(t) = \text{cost.} = \omega_*$ ,  $\omega_1(t) = \omega_1(0) \cos(k\delta t)$   
 $\omega_2(t) = \omega_2(0) \sin(k\delta t)$  }  $\Rightarrow |\bar{\omega}(\frac{\pi}{2k\delta}) - \bar{\omega}(0)| = |\omega_1(0)(\bar{e}_2 - \bar{e}_1)| = 2|\omega_1(0)|$  instabile

► Moto alla Poinsot generico ( $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ )

Teorema di Poinsot: In un moto alla Poinsot rispetto ad un polo  $Q$  (pt. fisso o cdm), l'ellissoide d'inerzia centrato in  $Q$  rotola senza strisciare su un piano fisso  $\pi$  t.c.

$$\pi \perp \bar{L}_Q \text{ e } \text{dist}(Q, \pi) = \text{cost. } \forall t \in \mathbb{R}$$

OSS: Dato la simmetria del sistema, in realtà ci sono due piani che soddisfano le condizioni dell'enuciato: uno sopra e uno sotto l'ellissoide di inerzia



dim.: L'ellissoide di inerzia rispetto a  $Q$  è la superficie in  $\mathbb{R}^3$

$$E_Q = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{x} \cdot \Pi_Q \bar{x} = 1 \} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f_Q(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \Pi_Q \bar{x} - 1 = 0 \} = \text{superficie di livello di } f_Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \hat{n} = \nabla f_Q / |\nabla f_Q| \text{ è il vettore che identifica la direzione ortogonale a } E_Q.$$

Fissando come sist. di rif.  $(Q, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = \{ \text{oni principali} \}$  e tenendo presente che i momenti principali sono costanti intrinseche del corpo rigido, si ha

$$\nabla f_Q = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{x} \cdot \Pi_Q \bar{x} - 1) \right)_{i=1,2,3} = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 - 1) \right) = (2 I_i e_i) = 2 \Pi_Q \bar{x} \Rightarrow \Pi_Q \bar{x} \perp E_Q$$

• Ricordiamo che l'one d'istantanea rotazione è la retta in  $\mathbb{R}^3$

$$r = \{ P_\lambda \in E^3 \mid \overline{QP}_\lambda = \lambda \bar{\omega} + \frac{\bar{\omega} \wedge \bar{v}_0}{|\bar{\omega}|^2}, \lambda \in \mathbb{R} \} \rightarrow \text{Scegliendo } O = Q \text{ pt. fisso} \Rightarrow \overline{QP}_\lambda = \lambda \bar{\omega}$$

• Cerchiamo i punti di intersezione tra one di istantanea rotazione ed ellissoide d'inerzia, ottenendo  $T_Q = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \Pi_Q \bar{\omega} > 0$  (se no è il caso banale di un corpo che non ruota).

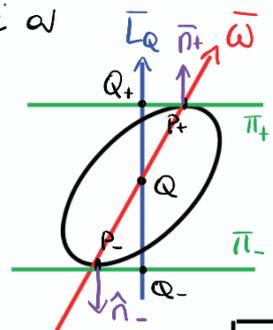
$$P \in r \cap E_Q \Rightarrow \begin{cases} \overline{QP} = \lambda \bar{\omega} \\ \overline{QP} \cdot \Pi_Q \overline{QP} = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = (\lambda \bar{\omega}) \cdot \Pi_Q (\lambda \bar{\omega}) = \lambda^2 (2 T_Q) \Rightarrow \lambda_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2 T_Q}} \rightarrow \overline{QP}_{\pm} = \lambda_{\pm} \bar{\omega}$$

Nei punti d'intersezione  $P_{\pm}$ , i piani  $\pi_{\pm}$  tangenti a  $E_Q$  sono ortogonali a

$$\hat{n}_{\pm} = \frac{\nabla f_Q}{|\nabla f_Q|} \Big|_{\bar{x} = \overline{QP}_{\pm}} = \frac{2 \Pi_Q \overline{QP}_{\pm}}{|2 \Pi_Q \overline{QP}_{\pm}|} = \frac{2 \lambda_{\pm} \Pi_Q \bar{\omega}}{|2 \lambda_{\pm} \Pi_Q \bar{\omega}|} = \pm \frac{\Pi_Q \bar{\omega}}{|\Pi_Q \bar{\omega}|} = \pm \frac{\bar{L}_Q}{|\bar{L}_Q|} \Rightarrow \pi_{\pm} \perp \bar{L}_Q$$

NB:  $P_{\pm} \in$  one istant. rotaz.  $\Rightarrow \bar{v}_{P_{\pm}} = \bar{0} \Rightarrow E_Q$  rotola senza strisciare

$$\begin{aligned} \bullet Q_{\pm} = \text{proiezione di } Q \text{ sui piani } \pi_{\pm} &\Rightarrow \text{dist}(Q, \pi_{\pm}) = |\overline{Q_{\pm}Q}| = |(\overline{QP}_{\pm} \cdot \hat{n}) \hat{n}| \\ &= |(\lambda_{\pm} \bar{\omega}) \cdot (\pm \frac{\bar{L}_Q}{|\bar{L}_Q|})| = \left| \frac{\bar{\omega} \cdot \bar{L}_Q}{\sqrt{2 T_Q} |\bar{L}_Q|} \right| = \frac{\sqrt{2 T_Q}}{|\bar{L}_Q|} = \text{cost.} \end{aligned}$$



OSS: Il punto di contatto  $P_{\pm}$  tra l'ellissoide d'inerzia  $E_Q$  ed il piano fisso  $\pi_{\pm}$  si muove nel tempo, non sull'ellissoide che sul piano.

$$\begin{aligned} \overline{QP_{\pm}}(t) &= \sum_{\alpha=1}^3 x_{\alpha}(t) \hat{e}_{\alpha} = \text{rappresentazione rispetto a terzina fissa } \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} \text{ solidale a } \pi_{\pm} \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 X_{\alpha}(t) \bar{e}_{\alpha}(t) = \text{ " " ad assi principali } \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \text{ solidali a } E_Q \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma_{\pm} = \left\{ \sum_{\alpha} x_{\alpha}(t) \hat{e}_{\alpha} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \omega_3 \omega_3 \text{ su } \pi = \text{erpoloide}$$

$$\Gamma_{\pm} = \left\{ \sum_{\alpha} X_{\alpha}(t) \bar{e}_{\alpha} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \omega_3 \omega_3 \text{ su } E_Q = \text{poloide}$$



NB:  $|\overline{L}_Q|^2 = I_1^2 X_1(t)^2 + I_2^2 X_2(t)^2 + I_3^2 X_3(t)^2 = l_0^2 = \text{cost.}$   
 $2T_Q = I_1 X_1(t)^2 + I_2 X_2(t)^2 + I_3 X_3(t)^2 = 2\tau_0 = \text{cost.}$  }  $\Rightarrow$  poloide = intersezione di due ellissoidi

NB: Nel caso giroscopico  $I_1 = I_2 \neq I_3$ : erpoloide = caso fisso  $\cap \pi_{\pm}$  = circonferenza  
 poloide = caso mobile  $\cap E_Q$  = circonferenza

### 5.3.4) Moti polari con attrito

A titolo esemplificativo, nel seguito si studia il moto di un giroscopio soggetto a momento d'attrito:

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 \neq I_3 \rightarrow \beta = I_3 / I_1 > 0 \\ \overline{M}_G^{(e)} = -\mu \bar{\omega} \rightarrow \tau = I_1 / \mu > 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 - \mu \omega_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 - \mu \omega_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 - \mu \omega_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_1 = (1 - \beta) \omega_2 \omega_3 - \omega_1 / \tau \\ \dot{\omega}_2 = (\beta - 1) \omega_3 \omega_1 - \omega_2 / \tau \\ \dot{\omega}_3 = -\omega_3 / \beta \tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 \dot{\omega}_1 = (1 - \beta) \omega_1 \omega_2 \omega_3 - \omega_1^2 / \tau \\ \omega_2 \dot{\omega}_2 = (\beta - 1) \omega_1 \omega_2 \omega_3 - \omega_2^2 / \tau \\ \dot{\omega}_3 = -\omega_3 / \beta \tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} (\omega_1^2 + \omega_2^2) = 2(\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2) = -\frac{2}{\tau} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \\ \dot{\omega}_3 = -\frac{1}{\beta \tau} \omega_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) = (\omega_1^2(0) + \omega_2^2(0)) e^{-\frac{2t}{\tau}} \\ \omega_3(t) = \omega_3(0) e^{-\frac{t}{\beta \tau}} \end{cases}$$

OSS:  $|\bar{\omega}(t)|^2 = \omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ : la rotazione del corpo rallenta (esponenzialmente) fino a che il corpo non smette di ruotare

OSS: Sia  $\theta$  l'angolo tra la velocità angolare  $\bar{\omega}$  e l'asse principale  $\bar{e}_3$ :

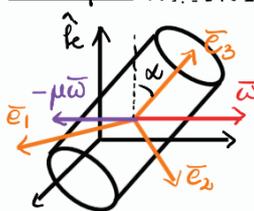
$$(\cos \theta(t))^2 = \frac{[\bar{\omega}(t) \cdot \bar{e}_3(t)]^2}{|\bar{\omega}(t)|^2 |\bar{e}_3(t)|^2} = \frac{[\omega_3(t)]^2}{|\bar{\omega}(t)|^2} = \frac{\omega_3^2(0) e^{-\frac{2t}{\beta \tau}}}{(\omega_1^2(0) + \omega_2^2(0)) e^{-\frac{2t}{\tau}} + \omega_3^2(0) e^{-\frac{2t}{\beta \tau}}} = \frac{\omega_3^2(0)}{(\omega_1^2(0) + \omega_2^2(0)) e^{\frac{2t}{\beta \tau} (1 - \beta)} + \omega_3^2(0)}$$

$$\hookrightarrow |\cos \theta(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{se } \beta < 1 \\ 1 & \text{se } \beta > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \theta(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \begin{cases} \pi/2 & \text{se } I_1 = I_2 > I_3 \\ 0, \pi & \text{se } I_1 = I_2 < I_3 \end{cases}$$

Quindi, se l'adm iniziale non è una rotazione attorno ad uno degli assi d'inerzia principali:

- $\bar{e}_3 =$  asse con momento d'inerzia minimo ( $I_1 = I_2 > I_3$ )  $\Rightarrow \bar{\omega} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \perp \bar{e}_3$ 
  - $\leftrightarrow$  sezione massimo dell'ellissoide
- $\bar{e}_3 =$  asse con momento d'inerzia massimo ( $I_1 = I_2 < I_3$ )  $\Rightarrow \bar{\omega} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \parallel \bar{e}_3$ 
  - $\leftrightarrow$  sezione minimo dell'ellissoide

### Esempio (cilindro omogeneo in caduta libera, rallentato da attrito)



Sistema di forze esterne  $\mathcal{F} = \{ (G_T - Mg \hat{k}), \overline{M}_G = -\mu \bar{\omega} \} \Rightarrow \overline{R}^{(e)} = -Mg \hat{k}, \overline{M}_G^{(e)} = -\mu \bar{\omega}$

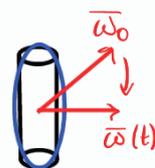
$$\overline{P} = M \overline{v}_G \Rightarrow M \overline{a}_G = \overline{R}^{(e)} = -Mg \hat{k} \Rightarrow \overline{a}_G = -g \hat{k} \Rightarrow \overline{x}_G(t) = \overline{x}_G(0) + \overline{v}_G(0) t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{k}$$

$$\dot{\overline{L}}_G = \mathbb{I}_G \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \wedge \mathbb{I}_G \bar{\omega} = \overline{M}_G^{(e)} = -\mu \bar{\omega}$$

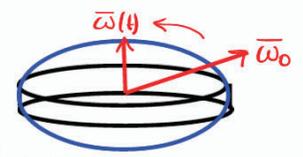
Tensore d'inerzia rispetto agli assi principali di simmetria

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr r \rho (r^2 \sin^2 \theta + z^2) = M \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) = I_2 \\ I_3 &= \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr r \rho (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} M R^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbb{I}_G = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \text{ struttura giroscopica.}$$

- Cilindro allungato:  $h \gg R \Rightarrow I_1 = I_2 \gg I_3 \Rightarrow \bar{\omega} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \perp \bar{e}_3$  (oblatto)  
 $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{I_1}} \ll \frac{1}{\sqrt{I_3}} = \omega_3$



• Cilindro appiattito:  $h \ll R \Rightarrow I_1 = I_2 \ll I_3 \Rightarrow \bar{\omega} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \parallel \bar{e}_3$   
 (prolato)  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{I_1}} \gg \frac{1}{\sqrt{I_3}} = \omega_3$



NB: La forza di attrito viscoso dipende da forma e orientazione del corpo.

### 5.3.5) Moti polari di corpi rigidi pesanti (Trottola simmetrica pesante)

A titolo esemplificativo, consideriamo un corpo rigido pesante con struttura giroscopica, vincolato in un punto Q opportunamente all'asse di inerzia giroscopico da una cerniera sferica fissa.

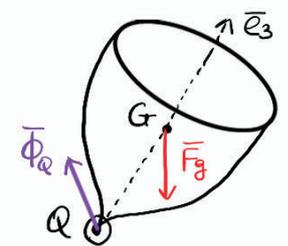
$(Q, \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\})$  sist. di rif. fisso

$(Q, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$  sist. di rif. solidale (assi principali con  $I_1 = I_2 \neq I_3$ )

Simmetria cilindrica  $\Rightarrow \bar{Q}G \parallel \bar{e}_3 \rightarrow \bar{Q}G = b \bar{e}_3$

Sistema di forze esterne  $\mathcal{F}^{(e)} = \{(G, \bar{F}_g), (Q, \bar{\Phi}_Q)\}$

$\hookrightarrow \bar{M}_Q^{(e)} = \bar{Q}G \wedge \bar{F}_g = (b \bar{e}_3) \wedge (-mg \hat{k}) = mgb (\hat{k} \wedge \bar{e}_3)$



Consideriamo rotazioni uniformi con  $\bar{\omega} \parallel \hat{k}$ , fissando:

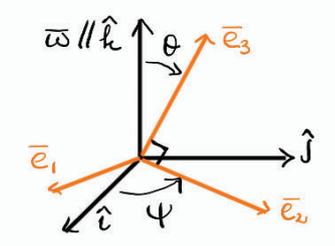
$\bar{e}_1 \parallel$  asse dei nodi  $\Rightarrow$  angolo di rotazione proprio  $\phi = 0$   
 $\bar{e}_3 \parallel$  asse giroscopico  $\rightarrow \bar{e}_2$  t.c.  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  è terna d.x

$\Rightarrow \theta =$  angolo di nutazione = angolo tra  $\hat{k}$  ed  $\bar{e}_3$

$\psi =$  angolo di precessione  $\rightarrow \dot{\psi} =$  velocità angolare

$\Rightarrow \bar{\omega} = \dot{\psi} \hat{k} = \dot{\psi} \cos \theta \bar{e}_3 - \dot{\psi} \sin \theta \bar{e}_2 = \text{cost.} \rightarrow \dot{\bar{\omega}} = \bar{0}$

$\bar{M}_Q^{(e)} = mgb (\hat{k} \wedge \bar{e}_3) = -mgb \sin \theta \bar{e}_1$



Eq. Eulero con  $I_1 = I_2 \neq I_3$ :

$$\begin{cases} 0 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + \bar{M}_Q^{(e)} \cdot \bar{e}_1 = (I_1 - I_3) (-\dot{\psi} \sin \theta) (\dot{\psi} \cos \theta) - mgb \sin \theta \\ 0 = (I_3 - I_1) \omega_3 \dot{\psi} + \bar{M}_Q^{(e)} \cdot \bar{e}_2 = 0 \\ 0 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + \bar{M}_Q^{(e)} \cdot \bar{e}_3 = 0 \end{cases}$$

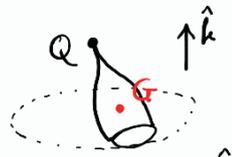
$\Rightarrow [(I_1 - I_3) \cos \theta \dot{\psi}^2 + mgb] \sin \theta = 0$

OSS: 0)  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$  non sempre soluzioni  $\rightarrow G = \text{cdm} \in$  asse  $\parallel \hat{k}$  passante per Q;  $\dot{\psi}$  arbitrario

1)  $I_1 = I_2 = I_3$  (giroscopio sferico)  $\Rightarrow \theta = 0$  v  $\theta = \pi$

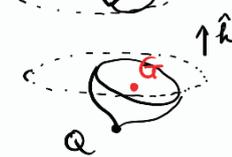
2)  $I_1 = I_2 > I_3$  (giroscopio oblatto)  $\Rightarrow \cos \theta < 0 \Rightarrow \theta \in [\pi/2, \pi] \Rightarrow \text{cdm sotto Q}$

$\Rightarrow \dot{\psi}^2 = \frac{mgb}{(I_1 - I_3) |\cos \theta|}$



3)  $I_1 = I_2 < I_3$  (giroscopio prolato)  $\Rightarrow \cos \theta > 0 \Rightarrow \theta \in [0, \pi/2] \Rightarrow \text{cdm sopra Q}$

$\Rightarrow \dot{\psi}^2 = \frac{mgb}{(I_3 - I_1) \cos \theta}$



OSS: ECD\_I  $\Rightarrow m \bar{a}_G = \bar{F}_g + \bar{\Phi}_Q$

Nel sist. di rif. fisso  $\bar{Q}G = b \bar{e}_3 = b (\cos \theta \hat{k} + \sin \theta (\cos \psi \hat{i} + \sin \psi \hat{j}))$   
 $\Rightarrow \bar{v}_G = \dot{\bar{Q}}G = b \sin \theta (-\dot{\psi} \sin \psi \hat{i} + \dot{\psi} \cos \psi \hat{j})$   
 $\Rightarrow \bar{a}_G = -b \sin \theta (\dot{\psi}^2 \cos \psi \hat{i} + \dot{\psi}^2 \sin \psi \hat{j})$   
 $\Rightarrow \bar{\Phi}_Q = mgb \hat{k} - mb \sin \theta (\cos \psi \hat{i} + \sin \psi \hat{j}) \dot{\psi}^2$

### 5.3.6) Moti con asse fisso

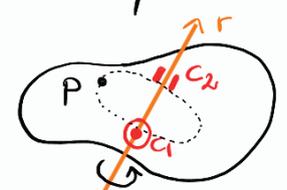
Consideriamo ora un corpo rigido vincolato in modo tale che gli unici moti possibili siano rotazioni attorno ad un asse fisso r.

OSS: E' un caso particolare dei moti polari studiati in precedenza

$\hookrightarrow$  Moto piano in cui tutti i punti del corpo rigido si muovono su circonferenze  $\perp r$ .

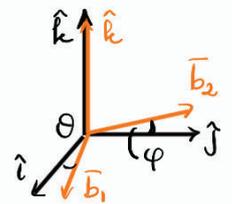
OSS: I vincoli necessari possono essere modellizzati come una coppia (non dissipativa):

- cerniera sferica fissa  $C_1 \rightarrow$  impedisce traslazioni
- maniccotto  $C_2 \rightarrow$  impedisce tutte le rotazioni tranne quelle con velocità angolare  $\bar{\omega} \parallel r$



Cinematica: 1! gdl  $\rightarrow$  coord. libere = angolo di rotazione =  $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{O}, \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}) \text{ sist. di rif. fisso} \\ (\mathcal{O}, \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \hat{k}\}) \text{ sist. di rif. solidale} \\ \text{con } \mathcal{O} \in r, \hat{k} \parallel r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\omega} = \dot{\varphi} \hat{k} \\ \bar{b}_1 = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \bar{b}_2 = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \\ \dot{\bar{k}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{b}}_1 = \dot{\varphi} \bar{b}_2 \\ \dot{\bar{b}}_2 = -\dot{\varphi} \bar{b}_1 \\ \dot{\bar{k}} = 0 \end{cases}$$



NB: In generale,  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$  non sono assi principali d'inertia

Sistema di forze:  $\mathcal{Y}^{(e)} = \mathcal{Y}^{(e,A)} \cup \mathcal{Y}^{(e,V)}$  con  $\mathcal{Y}^{(e,V)} = \{(C_1, \Phi_1), (C_2, \Phi_2)\}$ ,  $\Phi_2 \perp \hat{k}$  (manicotto)

$$\Rightarrow \bar{R}^{(e)} = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\bar{M}_O^{(e)} = \bar{OC}_1 \wedge \Phi_1 + \bar{OC}_2 \wedge \Phi_2 \quad (\mathcal{O}, C_1, C_2 \in r \Rightarrow \bar{OC}_1 \parallel \bar{OC}_2 \parallel \hat{k} \Rightarrow \bar{M}_O^{(e)} \perp \hat{k} \Rightarrow \bar{M}_O^{(e)} \cdot \hat{k} = 0)$$

$$\text{ECS: } \bar{R}^{(e)} = \bar{R}^{(e,A)} + \bar{R}^{(e,V)} = \bar{O} \Rightarrow \Phi_1 + \Phi_2 = -\bar{R}^{(e,A)}$$

$$\bar{M}_O^{(e)} = \bar{M}_O^{(e,A)} + \bar{M}_O^{(e,V)} = \bar{O} \Rightarrow \bar{OC}_1 \wedge \Phi_1 + \bar{OC}_2 \wedge \Phi_2 = -\bar{M}_O^{(e,A)} \rightarrow \text{Equilibrio possibile solo se } \bar{M}_O^{(e,A)} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\text{ECD: } G = \text{cdm}, l = \text{dist}(G, r) \Rightarrow \bar{OG} = l \bar{b}_1 \text{ (a meno di sostituire } \varphi \rightarrow \varphi + \text{cost.)} \rightarrow \bar{v}_G = l \dot{\varphi} \bar{b}_2, \bar{a}_G = -l \dot{\varphi}^2 \bar{b}_1 + l \ddot{\varphi} \bar{b}_2$$

$$m \bar{a}_G = \bar{R}^{(e)} \Rightarrow ml(-\dot{\varphi}^2 \bar{b}_1 + \ddot{\varphi} \bar{b}_2) = \Phi_1 + \Phi_2 + \bar{R}^{(e,A)} \Rightarrow \Phi_1 + \Phi_2 = ml(-\dot{\varphi}^2 \bar{b}_1 + \ddot{\varphi} \bar{b}_2) - \bar{R}^{(e,A)}$$

NB: reazioni vincolari dinamiche  $\neq$  reazioni vincolari statiche (uguali se e solo se  $l=0 \Leftrightarrow G = \text{cdm} \in r = \text{asse fisso}$ ).

$$\text{O punto fisso} \Rightarrow \bar{L}_O = \Pi_O \bar{\omega} = \Pi_O(\dot{\varphi} \hat{k}) = I_{13} \dot{\varphi} \bar{b}_1 + I_{23} \dot{\varphi} \bar{b}_2 + I_{33} \dot{\varphi} \hat{k}$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{L}}_O = I_{13}(\ddot{\varphi} \bar{b}_1 + \dot{\varphi}^2 \bar{b}_2) + I_{23}(\ddot{\varphi} \bar{b}_2 - \dot{\varphi}^2 \bar{b}_1) + I_{33} \ddot{\varphi} \hat{k} = (I_{13} \ddot{\varphi} - I_{23} \dot{\varphi}^2) \bar{b}_1 + (I_{13} \dot{\varphi}^2 + I_{23} \ddot{\varphi}) \bar{b}_2 + I_{33} \ddot{\varphi} \hat{k}$$

$$\dot{\bar{L}}_O = \bar{M}_O^{(e)} + \bar{P} \wedge \bar{v}_O \Rightarrow I_{13} \ddot{\varphi} - I_{23} \dot{\varphi}^2 = \bar{M}_O^{(e)} \cdot \bar{b}_1 = \bar{M}_O^{(e,A)} \cdot \bar{b}_1 + \bar{M}_O^{(e,V)} \cdot \bar{b}_1$$

$$I_{23} \ddot{\varphi} + I_{13} \dot{\varphi}^2 = \bar{M}_O^{(e)} \cdot \bar{b}_2 = \bar{M}_O^{(e,A)} \cdot \bar{b}_2 + \bar{M}_O^{(e,V)} \cdot \bar{b}_2$$

$$I_{33} \ddot{\varphi} = \bar{M}_O^{(e)} \cdot \hat{k} = \bar{M}_O^{(e,A)} \cdot \hat{k} + \bar{M}_O^{(e,V)} \cdot \hat{k} = \bar{M}_O^{(e,A)} \cdot \hat{k}$$

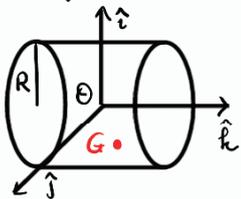
OSS:  $I_{33} \ddot{\varphi} = \bar{M}_O^{(e,A)} \cdot \hat{k}$  è equazione pura  $\rightarrow$  permette di determinare il moto  $\varphi(t)$ .

$$\left( \begin{aligned} \text{Le stesse equazioni può essere derivate con il teorema dell'energia cinetica} \\ T = \frac{1}{2} m |\bar{v}_O|^2 + m \bar{v}_O \cdot (\bar{\omega} \wedge \bar{OG}) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \Pi_O \bar{\omega} = \frac{1}{2} I_{33} \dot{\varphi}^2 \\ \Pi = \bar{R}^{(e)} \cdot \bar{v}_O + \bar{M}_O^{(e)} \cdot \bar{\omega} = \bar{M}_O^{(e,A)} \cdot \dot{\varphi} \hat{k} + \bar{M}_O^{(e,V)} \cdot \dot{\varphi} \hat{k} = \bar{M}_O^{(e,A)} \cdot \hat{k} \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\Pi} = I_{33} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = 0 \text{ oppure } I_{33} \ddot{\varphi} = \bar{M}_O^{(e,A)} \cdot \hat{k} \end{aligned} \right)$$

OSS: In generale, le componenti  $\bar{M}_O^{(e,V)} \cdot \bar{b}_i$  ( $i=1,2$ ) sono diverse in statica e dinamica

$$\left( \begin{aligned} \text{Uguali se e solo se } I_{13} = I_{23} = 0 \Leftrightarrow \hat{k} \text{ è asse principale d'inertia} \\ \text{Lemma: Le reazioni vincolari statiche e dinamiche coincidono se e solo se} \\ \left. \begin{aligned} \bullet \text{ cdm } \in \text{ asse fisso} \\ \bullet \text{ asse fisso} = \text{ asse principale d'inertia} \end{aligned} \right\} \text{ in questo caso, il corpo rigido } \end{aligned} \right) \text{ è detto "equilibrato"}$$

Esempio (Bilanciamento di una ruota - automobile, lavatrice, ...)



$\mathcal{O} =$  centro geometrico di una ruota cilindrica

$\hat{k} =$  asse di simmetria geometrica = asse di rotaz.

$G = \text{cdm} =$  centro materiale  $\neq \mathcal{O}$

$\rightarrow$  rotazioni con  $\bar{\omega} \parallel \hat{k}$  creano sollecitazioni problematiche (reazioni vincolari)

$(\mathcal{O}, \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\})$  sist. di rif. fisso

t.c.  $\bar{OG} = x_G \hat{i} + z_G \hat{k}$

È possibile equilibrare la ruota posizionando opportunamente due masse sulle basi del cilindro:

$$\left( \begin{aligned} (P_1, m_1), (P_2, m_2) \text{ t.c. } \bar{OP}_1 = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + \frac{h}{2} \hat{k} \\ \bar{OP}_2 = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} - \frac{h}{2} \hat{k} \end{aligned} \right) \rightarrow \exists? \text{ scelta di } x_1, y_1, x_2, y_2 \text{ che rende la ruota bilanciata?}$$

• Condizione 1: nuovo cdm  $G'$  è asse fisso di rotazione  $\rightarrow \bar{OG}' = l \hat{k}$

$$\bar{OG}' = \frac{M \bar{OG} + m_1 \bar{OP}_1 + m_2 \bar{OP}_2}{M + m_1 + m_2} = \frac{1}{M + m_1 + m_2} \left[ (M x_G + m_1 x_1 + m_2 x_2) \hat{i} + (m_1 y_1 + m_2 y_2) \hat{j} + (M z_G + m_1 \frac{h}{2} - m_2 \frac{h}{2}) \hat{k} \right] \Rightarrow \begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 &= -M x_G \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 &= 0 \end{aligned}$$

• Condizione 2: nuovo asse d'inertia principale = asse fisso  $\rightarrow I_{13} = I_{23} = 0$

$$\begin{aligned} I_{13}^1 &= I_{13} - m_1 x_1 z_1 - m_2 x_2 z_2 = I_{13} - m_1 x_1 \frac{h}{2} + m_2 x_2 \frac{h}{2} \\ I_{23}^1 &= I_{23} - m_1 y_1 z_1 - m_2 y_2 z_2 = I_{23} - m_1 y_1 \frac{h}{2} + m_2 y_2 \frac{h}{2} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} m_1 x_1 - m_2 x_2 &= 2 I_{13} / h \\ m_1 y_1 - m_2 y_2 &= 2 I_{23} / h \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} &4 \text{ equazioni} \\ &4 \text{ incognite} \\ &x_1, x_2, y_1, y_2 \end{aligned}$$

Ricapitolando:

$$\begin{cases} 2m_1 x_1 = -M x_G + 2I_{13}/h \\ 2m_2 x_2 = -M x_G - 2I_{13}/h \\ 2m_1 y_1 = 2I_{23}/h \\ 2m_2 y_2 = -2I_{23}/h \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \overline{OP}_1 &= \left( \frac{I_{13}}{m_1 h} - \frac{M}{2m_1} x_G \right) \hat{i} + \frac{I_{23}}{m_1 h} \hat{j} + \frac{h}{2} \hat{k} \\ \overline{OP}_2 &= \left( -\frac{I_{13}}{m_2 h} - \frac{M}{2m_2} x_G \right) \hat{i} - \frac{I_{23}}{m_2 h} \hat{j} - \frac{h}{2} \hat{k} \end{aligned}$$

## 6) FORMALISMO LAGRANGIANO

In questo capitolo viene presentata una riformulazione della meccanica Newtoniana (1687) sviluppata da Lagrange (1788). La teoria fisica (meccanica classica) resta immutata, ma si adotta un diverso approccio matematico che mette in luce delle notevoli strutture geometriche.

- La formulazione Lagrangiana risulta essere più flessibile ed è alla base della descrizione matematica delle teorie fisiche più moderne.
- Uno degli ostacoli principali nell'utilizzo delle ECD è la presenza di forze reattive incoincute esercitate dai vincoli. Nella teoria Lagrangiana la presenza di vincoli è codificata negli atti di moto ammissibili, piuttosto che nelle reazioni vincolari. In questo modo si lavora sempre con eq. pure del moto. D'altra parte, la teoria permette di trattare in modo semplice solo vincoli olonomi ideali.

### 6.1) Equazioni di Eulero-Lagrange

Il risultato seguente è l'analogo dinamico del Principio dei Lavori Virtuali

Teorema (Principio di d'Alembert) Sia  $\{(P_i, m_i)\}_{i=1, \dots, N}$  un sistema di punti materiali soggetti ad un sistema di forze attive  $\mathcal{F}^{(A)} = \{(P_i, \vec{F}_i)\}_{i=1, \dots, N}$  ed a vincoli ideali. Allora

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \{P_i(t)\}_{i=1, \dots, N} \in \mathcal{E}^{3N} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{P}_i \leq 0 \quad \forall \{\delta \vec{P}_i\} \text{ spostamenti virtuali} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \vec{v}_i \leq 0 \quad \forall \{\vec{v}_i\} \text{ velocità virtuali}$$

dim: Vincoli descritti da  $\mathcal{F}^{(V)} = \{(P_i, \vec{\Phi}_i)\}_{i=1, \dots, N}$

Eq. Newton (ECD):  $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{\Phi}_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{P}_i = 0 \quad \forall \{\delta \vec{P}_i\}_{i=1, \dots, N}$

Vincoli ideali:  $\sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i \cdot \delta \vec{P}_i \geq 0 \quad \forall \{\delta \vec{P}_i\}_{i=1, \dots, N} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{P}_i = - \sum_{i=1}^N \vec{\Phi}_i \cdot \delta \vec{P}_i \leq 0$   $\square$

OSS:  $\sum_i (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{P}_i \leq 0$  è detta relazione simbolica della dinamica (RSD). In realtà, data l'orbitarietà di  $\{\delta \vec{P}_i\}_{i=1, \dots, N}$ , si tratta di molte relazioni, ciascuna delle quali è pura.

OSS:  $(-m_i \vec{a}_i) =$  forze d'inerzia,  $\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i =$  "forze perdute".

OSS: Tutte le grandezze in  $\sum_i (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{P}_i$  sono valutate al tempo  $t \in \mathbb{R}$ , e la relazione è valida per tutti i tempi  $t \in \mathbb{R}$ .

OSS: Nel caso di vincoli perfetti (ideali e bilateri), tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili. Ne segue che la relazione diventa

$$\sum_i (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{P}_i = 0 \quad \forall \{\delta \vec{P}_i\}_{i=1, \dots, N} \text{ (ESD: equazione simbolica della dinamica)}$$

Esempio: Pendolo matematico:  $P =$  punto materiale di massa  $m$ ;  $O =$  cerniera fissa  
 $OP =$  asta rigida di lunghezza  $l$  e massa trascurabile

# qdL = 1  $\rightarrow$  coord generalizzate  $\theta \in [0, 2\pi)$

$(\theta, l, \hat{i}, \hat{j})$  sist. rif. fissa  $\rightarrow \begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta \hat{i} - \cos\theta \hat{j} \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r \end{cases}$

$(\theta, l, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \hat{k})$  sist. rif. solidale con OP  $\rightarrow \begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta \hat{i} - \cos\theta \hat{j} \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r \end{cases}$

$\vec{OP} = l \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v}_p = l \dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow \delta \vec{P} = \vec{v}_p' \delta t = l \delta \theta \vec{e}_\theta$   
 $\Rightarrow \vec{a}_p = l \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - l \dot{\theta}^2 \vec{e}_r, \quad \vec{F} = -mg \hat{j} = -mg(\sin\theta \vec{e}_\theta - \cos\theta \vec{e}_r)$

ESD:  $0 = (\vec{F} - m \vec{a}_p) \cdot \delta \vec{P} = [-mg(\sin\theta \vec{e}_\theta - \cos\theta \vec{e}_r) - m(l \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - l \dot{\theta}^2 \vec{e}_r)] \cdot (l \delta \theta \vec{e}_\theta) = [-g \sin\theta - l \ddot{\theta}] ml \delta \theta \quad \forall \delta \theta$   
 $\Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin\theta \quad (\sim \ddot{\theta} \simeq -\omega^2 \theta \text{ con } \omega = \sqrt{g/l} \text{ se } |\theta| \ll 1)$

Teorema (d'Alembert, olonomo bilatero). Se i vincoli sono olonomi, ideali, bilateri (perfetti), dato un sistema di coord. generalizzate  $\{q_k\}_{k=1, \dots, g}$ , la ESD equivale a

$$Q_k = \tau_k \quad \forall k=1, \dots, g \quad \text{con} \quad Q_k = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k}, \quad \tau_k = \sum_{i=1}^N m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k}$$

OSS:  $Q_k = \tau_k$  sono eq pure della dinamica

OSS:  $Q_k =$  "forze generalizzate",  $\tau_k =$  "componenti Lagrangiane delle forze d'inerzia"

dim:  $P_i = P_i(q_1, \dots, q_g, t) \Rightarrow \delta P_i = \sum_{k=1}^g \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k} \delta q_k$  ( $\delta q_k =$  spostamenti virtuali generalizzati)

ESD  $\Leftrightarrow 0 = \sum_i (\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i) \cdot \delta P_i = \sum_i (\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i) \cdot \sum_k \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_k \left[ \sum_i \bar{F}_i \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k} - \sum_i m_i \bar{a}_i \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k$

$\Leftrightarrow Q_k = \sum_i \bar{F}_i \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k} = \sum_i m_i \bar{a}_i \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k} = \tau_k \quad \forall k=1, \dots, g.$

Lemma (Binomi Lagrangiani) Sia  $T = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$  l'energia cinetica di un sistema olonomo descritto con coordinate generalizzate  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_g)$ . Allora

$$\tau_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad \forall k=1, \dots, g$$

dim:  $P_i = P_i(\bar{q}, t) \Rightarrow \bar{v}_i = \dot{\bar{O}P}_i = \sum_{k=1}^g \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial t}$

a)  $\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k}$  (pensando  $\dot{q}_k$  come coord. indipendente da  $q_k, t \Leftrightarrow adm$ )

b)  $\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_h} = \sum_k \frac{\partial^2 \bar{O}P_i}{\partial q_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \bar{O}P_i}{\partial q_h \partial t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_h}$  (teo Schwarz su derivate miste)

$\tau_k = \sum_i m_i \dot{\bar{v}}_i \cdot \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k} \right) - \sum_i m_i \bar{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{O}P_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \sum_i m_i \bar{v}_i \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_k}$

$= \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} |\bar{v}_i|^2 \right) - \sum_i m_i \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} |\bar{v}_i|^2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \frac{1}{2} \sum_i m_i |\bar{v}_i|^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{1}{2} \sum_i m_i |\bar{v}_i|^2 \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}$

Teorema (Lagrange) La dinamica di un sistema di punti materiali soggetti a vincoli olonomi perfetti e ad un sistema di forze con componenti generalizzate  $\{Q_k\}_{k=1, \dots, g}$  è descritta da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad \forall k=1, \dots, g \quad \left( \begin{array}{l} \text{Equazioni di Lagrange} \\ \text{non-conservative} \end{array} \right)$$

dim: Ovie conseguenza del teorema di d'Alembert e del lemma sui binomi Lagrangiani

OSS: Ognuna delle eq di Lagrange ( $k=1, \dots, g$ ) è un'eq. pura del moto (diversamente da ECD)

OSS: Forme delle equazioni non dipende dalla particolare scelta di coord. libere.

Cambiando coord., cambiano membri sx e dx, ma resta valida l'identità.

Teorema (Lagrange conservativo) La dinamica di un sistema di punti materiali soggetti a vincoli olonomi perfetti e ad un sistema di forze conservative con energia potenziale  $U(\bar{q})$  è descritta da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{Equazioni di Lagrange conservative}$$

dove  $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) - U(\bar{q})$  è detta funzione Lagrangiana.

dim: Forze attive conservative  $\Rightarrow Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k}(\bar{q}) \quad \forall k=1, \dots, g$

$U(\bar{q})$  indipendente da  $\dot{\bar{q}} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad \forall k=1, \dots, g$

$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - U) - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - U)$

OSS: Nel caso di sistemi misti, in cui solo parte delle forze sono conservative si ha

$$Q_k = Q_k^{(C)} + Q_k^{(NC)}, \quad Q_k^{(C)} = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^{(NC)} \quad \text{con } L = T - U$$

OSS: Eq. Lagrange = "proiezioni" delle eq. di Newton nello spazio tangente all'insieme delle config.  
 $\rightarrow$  per informazione relativa a direzione ortogonale ( $\leftrightarrow$  vincoli).

OSS: La funzione Lagrangiana non è univocamente determinata. Lagrangiane diverse possono dare luogo ad eq. di Lagrange equivalenti.

Lemma Sia  $L_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ ,  $L_2(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = L_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) + \frac{d}{dt} L(\bar{q}, t) \Rightarrow$  stesse eq. Lagrange

dim:  $\frac{d}{dt} L = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} [L_2 - L_1] - \frac{\partial}{\partial q_k} [L_2 - L_1] = \frac{d}{dt} \left[ \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta_{jk} \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} \right)$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(\bar{q}, t) - \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial q_k \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_k \partial t} = 0.$$

Lemma (Energia cinetica di sistemi olonomi) L'energia cinetica di un sistema oloonomo descritto da coord. generalizzate  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_g)$  è data da

$$T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^g \omega_{jk}(\bar{q}, t) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^g b_j(\bar{q}, t) \dot{q}_j + c(\bar{q}, t)$$

$$\omega_{jk}(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k}, \quad b_j(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t}, \quad c(\bar{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t}$$

dim:  $\vec{v}_i = \dot{\overline{OP}}_i = \frac{d}{dt} \overline{OP}_i(\bar{q}(t), t) = \sum_{j=1}^g \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t}$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\vec{v}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{j=1}^g \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^g \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t} \right)$$

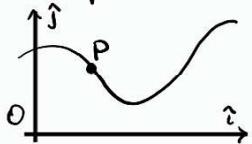
$$= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j,k} m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[ 2 \sum_j \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t} \dot{q}_j + \sum_k \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] + \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t}$$

OSS: In forma matriciale, posti  $A = (\omega_{jk})$  (matrice di massa),  $\vec{b} = (b_j)$ , si ha

$$T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} \cdot A(\bar{q}, t) \dot{\bar{q}} + \vec{b}(\bar{q}, t) \cdot \dot{\bar{q}} + c(\bar{q}, t)$$

OSS: vincoli fissi  $\Rightarrow \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial t} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \Rightarrow \vec{b}(\bar{q}, t) = \vec{0}, c(\bar{q}, t) = 0 \Rightarrow T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} \cdot A(\bar{q}, t) \dot{\bar{q}}$   
 $\Rightarrow$  energia cinetica = funzione quadratica nelle velocità generalizzate  $\dot{\bar{q}}$ .

Esempio: Punto materiale di massa  $m$  vincolato a guida liscia mobile



Guida descritta come funzione  $f_t(x)$ , dipendente parametricamente da  $t$ .  
 $(0, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  sist. ref. fisso  $\rightarrow \overline{OP}(t) = x(t)\hat{i} + f_t(x(t))\hat{j}$  ( $x =$  coord. generalizzata)  
 vincolo perfetto

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \overline{OP}}{\partial x} &= \hat{i} + \frac{\partial f_t}{\partial x} \hat{j} \\ \frac{\partial \overline{OP}}{\partial t} &= \frac{\partial f_t}{\partial t} \hat{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \omega(x, t) &= m \frac{\partial \overline{OP}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \overline{OP}}{\partial x} = m \left[ 1 + \left( \frac{\partial f_t}{\partial x} \right)^2 \right] > 0 \\ b(x, t) &= m \frac{\partial \overline{OP}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \overline{OP}}{\partial t} = m \left( \frac{\partial f_t}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial f_t}{\partial t} \right) \\ c(x, t) &= \frac{m}{2} \frac{\partial \overline{OP}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \overline{OP}}{\partial t} = \frac{m}{2} \left( \frac{\partial f_t}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \omega \dot{x}^2 + b \dot{x} + c$$

• Guida rettilinea ruotante ( $O =$  cerniera fissa):  $f_t(x) = \mu(t)x \Rightarrow \frac{\partial f_t}{\partial x} = \mu(t), \frac{\partial f_t}{\partial t} = \dot{\mu}(t)x$   
 $\Rightarrow \omega(x, t) = m[1 + \mu^2(t)], \quad b(x, t) = m\mu(t)\dot{\mu}(t)x, \quad c(x, t) = \frac{1}{2} m \dot{\mu}^2(t)x^2$

• Guida fissa:  $f_t(x) = f(x) \Rightarrow \frac{\partial f_t}{\partial x} = f'(x), \frac{\partial f_t}{\partial t} = 0 \Rightarrow \omega(x, t) = m[1 + (f'(x))^2], \quad b(x, t) = c(x, t) = 0$

Lemma (Matrice di massa)  $A(\bar{q}, t) = (\omega_{jk}(\bar{q}, t))$  è simmetrica e definita positiva.

dim:  $\omega_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} = \sum_i m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} = \omega_{kj} \Rightarrow A = A^T$

$$\bullet \vec{p} \cdot A \vec{p} = \sum_{j,k} p_j \omega_{jk} p_k = \sum_{j,k} \sum_i m_i \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} p_j p_k = \sum_i m_i \left( \sum_j \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} p_j \right) \cdot \left( \sum_k \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_k} p_k \right)$$

$$= \sum_i m_i \left| \sum_j \frac{\partial \overline{OP}_i}{\partial q_j} p_j \right|^2 \geq 0 \quad \forall \vec{p} \in \mathbb{R}^g \quad (\text{generalmente, } \vec{p} \cdot A \vec{p} = 0 \text{ solo se } \vec{p} = \vec{0}) \Rightarrow A > 0$$

Teorema (determinismo Lagrangiano): Per sistemi materiali soggetti a vincoli olonomi perfetti, le eq di Lagrange possono essere riscritte in forma normale come

$$\ddot{\bar{q}} = \bar{f}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

OSS: Sistemi di  $g = \# \text{gdL}$  eq. diff. ordinarie del secondo ordine pure.

OSS: Con opportune ipotesi di regolarità sulle forze attive, da questo risultato seguono esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy per ogni dato iniziale assegnato  $(\bar{q}(0), \dot{\bar{q}}(0))$ . Ciò significa che il moto del sistema è univocamente determinato dalla legge di evoluzione e dai dati iniziali.

dim: Eq. Lagrange:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} - \frac{\partial T}{\partial q_e} = Q_e = f_e^{(1)}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$

$\frac{\partial T}{\partial q_e} = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} \cdot \frac{\partial A}{\partial q_e} \dot{\bar{q}} + \frac{\partial \bar{b}}{\partial q_e} \dot{\bar{q}} + \frac{\partial c}{\partial q_e} = f_e^{(2)}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \quad A = A^T$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} = \frac{1}{2} \sum_{jk} a_{jk} (\delta_{je} \dot{q}_k + \dot{q}_j \delta_{ke}) + b_e = \sum_k a_{ek} \dot{q}_k + b_e = (A \dot{\bar{q}} + \bar{b})_e$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_e} = (A(\bar{q}, t) \ddot{\bar{q}} + \frac{\partial A}{\partial t} \dot{\bar{q}} \dot{\bar{q}} + \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial \bar{b}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{b}}{\partial t})_e = (A(\bar{q}, t) \ddot{\bar{q}})_e - f_e^{(3)}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$

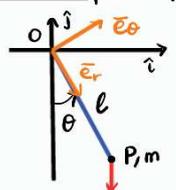
$A \ddot{\bar{q}} = \bar{f}^{(1)} + \bar{f}^{(2)} + \bar{f}^{(3)} = \bar{f}$  con  
 $A = A(\bar{q}, t), \bar{f} = \bar{f}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$   
 $\downarrow A > 0 \rightarrow \det A > 0 \rightarrow \exists A^{-1}$   
 $\ddot{\bar{q}} = A^{-1} \bar{f}$

Esempio (Punto materiale pesante libero):  $\# \text{gdL} = 3 \rightarrow$  coord. libere  $\bar{q} = \bar{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$T = \frac{1}{2} m |\dot{\bar{x}}|^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$   
 $U = mgz$   
 $L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) - 0 = m\ddot{x} \\ 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} (m\dot{y}) - 0 = m\ddot{y} \\ 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt} (m\dot{z}) - (-mg) = m\ddot{z} + mg \end{cases} \Rightarrow \ddot{\bar{x}} = -g \hat{k}$

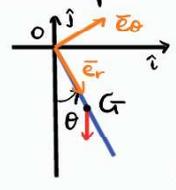
Esempio (pendolo matematico):  $\# \text{gdL} = 1 \rightarrow$  coord. libera  $\theta \in [0, 2\pi)$



$\bar{x} = l \bar{e}_r$   
 $\dot{\bar{x}} = l \dot{\theta} \bar{e}_\theta$   
 $T = \frac{1}{2} m |\dot{\bar{x}}|^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$   
 $U = mgy = -mgl \cos \theta$   
 $L = T - U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$

$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\theta}) - (-mgl \sin \theta) = m l^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta$   
 $\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$

Esempio (Pendolo fisico) Asta rigida omogenea  $\rightarrow \# \text{gdL} = 1 \rightarrow$  coord. libera  $\theta \in [0, 2\pi)$



$O$  cerniera fissa  $\Rightarrow \bar{v}_O = \bar{0}$   
 $\bar{\omega} = \dot{\theta} \hat{k}$   
 $I_O = \int_0^l \rho s^2 ds = \rho \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} m l^2$   
 $U = mgy_G = -mgl \cos \theta \rightarrow L = T - U = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgl \cos \theta$

$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot I_O \bar{\omega} = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2$

$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} (\frac{1}{3} m l^2 \dot{\theta}) - (-\frac{1}{2} mgl \sin \theta)$   
 $\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \theta$

## 6.2) Integrali primi Lagrangiani

Def: E' detto integrale primo (o costante del moto) una funzione  $f(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$  che mantiene lo stesso valore durante il moto del sistema (cioè lungo le soluzioni delle eq di Lagrange)

$$f(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = \text{cost.} \quad \forall t \geq 0 \quad (t \mapsto \bar{q}(t) \text{ soluzione eq Lagrange})$$

OSS: Il valore della costante è fissato dai dati iniziali (dati diversi  $\Rightarrow$  costanti diverse)

OSS: "Integrali primi" perché permettono di integrare, cioè risolvere, le eq del moto, eliminando  $g$ dc incogniti (esprimendoli in funzione di altri).

Def: E' detta ciclica una coordinata generalizzata che compare nelle Lagrangiane solo in forma derivata

$$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = L(q_1, \dots, q_k, \dots, q_g, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, \dots, \dot{q}_g, t) \rightarrow q_k = \text{coord. ciclica}$$

Proposizione: In un sistema Lagrangiano conservativo con coord. cicliche  $q_k$ , il momento associato è una costante del moto

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\text{dim: } q_k \text{ ciclica} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \dot{p}_k \Rightarrow p_k(t) = \text{cost. } \forall t \in \mathbb{R}$$

Esempio: Punto materiale pesante libero

$$\left. \begin{array}{l} T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ U = mgz \end{array} \right\} \Rightarrow L(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \Rightarrow x, y \text{ cicliche} \Rightarrow \begin{cases} p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \text{cost.} \\ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = \text{cost.} \end{cases}$$

Esempio: Punto materiale vincolato a piano orizzontale, collegato a punto fisso da molla ideale



$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} = r \bar{e}_r \\ \dot{\bar{x}} = \dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\theta} \bar{e}_\theta \end{array} \right\} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m |\dot{\bar{x}}|^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad U = \frac{1}{2} k |\bar{x}|^2 = \frac{1}{2} k r^2$$

$$\Rightarrow L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = L(r, \theta; \dot{r}, \dot{\theta}) \Rightarrow \theta \text{ ciclica} \Rightarrow p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = \text{costante}$$

Oss:  $\bar{L} \cdot \hat{k} = (\bar{x} \wedge m \dot{\bar{x}}) \cdot \hat{k} = [(r \bar{e}_r) \wedge m (\dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\theta} \bar{e}_\theta)] \cdot \hat{k} = m r^2 \dot{\theta} (\bar{e}_r \wedge \bar{e}_\theta) \cdot \hat{k} = m r^2 \dot{\theta} = p_\theta$

$$\begin{cases} 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) \\ 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt} (m \dot{r}) - (m r \dot{\theta}^2 - k r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_\theta = m r^2 \dot{\theta} = \text{cost} = L_z \\ m \ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 - k r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = \frac{L_z}{m r^2} \\ \ddot{r} = \frac{(L_z/m)^2}{r^3} - (k/m) r \end{cases}$$

Def: La funzione Hamiltoniana associata ad un sistema Lagrangiano è

$$H(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \sum_{k=1}^g \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Oss: più precisamente, l'Hamiltoniana è la trasformata di Legendre delle Lagrangiana

relazione omota  
invertibile per le  $\dot{q}_k \Rightarrow \dot{q}_k = \dot{q}_k(\bar{q}, \bar{p}, t), \quad H(\bar{q}, \bar{p}, t) = [\bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)]_{\dot{\bar{q}} = \dot{\bar{q}}(\bar{q}, \bar{p}, t)}$

Si può dimostrare che nel caso di Lagrangiane non-degeneri ( $\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \neq 0$ )  
le eq. di Lagrange sono equivalenti alle eq. di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{\bar{p}} H \\ -\nabla_{\bar{q}} H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{\bar{q}} H \\ \nabla_{\bar{p}} H \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\dot{\bar{z}} = J \nabla_{\bar{z}} H}$$

Formalismo Hamiltoniano, geometria symplettica (1833)

Proposizione: Lungo le soluzioni delle eq. di Lagrange si ha

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\text{dim: } \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = \sum_k \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) - \left( \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} \right) = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Oss: In particolare, nel caso di vincoli fissi e forze esterne indipendenti dal tempo si ha

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H \text{ è un integrale primo del moto.}$$

Lemma: In un sistema Lagrangiano con vincoli fissi e forze indipendenti dal tempo si ha

$$\boxed{H(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + U(\bar{q})}$$

$$\text{dim: } L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_{ij}(\bar{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(\bar{q})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_{ij} [\delta_{ik} \dot{q}_j + \dot{q}_i \delta_{jk}] = \frac{1}{2} [\sum_j \omega_{kj} \dot{q}_j + \sum_i \omega_{ik} \dot{q}_i] = \sum_j \omega_{kj} \dot{q}_j$$

$$H = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \sum_k \left( \sum_j \omega_{kj} \dot{q}_j \right) \dot{q}_k - \left( \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - U(\bar{q}) \right) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + U(\bar{q}) = T + U$$

Teorema (Emmy Noether - 1915) In un sistema Lagrangiano, ad ogni simmetria continua (differenziabile) corrisponde un integrale primo del moto. Più precisamente, se la trasformazione  $(t, \bar{q}) \mapsto (t + \delta t, \bar{q} + \delta \bar{q})$  con  $\delta \bar{q} = \sum_{\kappa} \epsilon_{\kappa} \bar{b}_{\kappa}$  lascia invariata la Lagrangiana, allora sono integrali primi le grandezze

$$I_{\kappa} = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} \cdot \dot{\bar{q}} - L \right) \delta t - \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} \cdot \bar{b}_{\kappa}$$

- Esempi:
- Invarianza per traslazioni spaziali  $\Rightarrow p_{\kappa} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\kappa}} = \text{cost.}$  (componente impulso)
  - " " rotazioni  $\Rightarrow L_{\kappa} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{\kappa}} = \text{cost.}$  (componente momento angolare)
  - " " traslazioni temporali  $\Rightarrow E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - L = \text{cost.}$  (energia meccanica)

OSS: Un teorema di Poincaré (1892) afferma che generalmente non esistono integrali primi (analitici) oltre all'energia meccanica. Quindi, in generale, non è possibile risolvere esplicitamente per quadrature le equazioni del moto.

### 6.3) Analisi qualitativa di sistemi conservativi 1D

Si consideri un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi perfetti fissi e forze conservative con  $\# \text{gdl} = 1$ . In questo caso è sempre possibile sfruttare la conservazione dell'energia meccanica per dedurre informazioni qualitative sulla dinamica.

Si ricordi che l'energia meccanica coincide con l'Hamiltoniana

$$E = H(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + U(q) = \frac{1}{2} \omega(q) \dot{q}^2 + U(q)$$

OSS: Hamiltoniane di questo tipo sono rilevanti anche per sistemi con  $\# \text{gdl} > 1$  ed un numero adeguato di integrali primi (vedi esempi).

OSS:  $E = \text{cost.} = E|_{t=0} = \frac{1}{2} \omega(q_0) \dot{q}_0^2 + U(q_0)$  con  $(q_0, \dot{q}_0) = \text{dati iniziali al tempo } t=0$ .  
 $\omega(q) = \text{matrice di massa} > 0 \Rightarrow E \geq U(q) \geq \inf_{\dot{q}} U(q)$

Esempio: Punto materiale vincolato a guida liscia fissa

$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m [1 + (f'(x))^2] \dot{x}^2$   
 $U = mgy = mgf(x)$   
 $\rightarrow E = \frac{1}{2} m [1 + (f'(x))^2] \dot{x}^2 + mgf(x)$

Esempio: Oscillatore piano

$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$   
 $U = \frac{1}{2} k r^2$   
 $p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = \text{cost.}$   
 $\Rightarrow E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{p_{\theta}^2}{2mr^2} + \frac{1}{2} k r^2$   
 $U_{\text{eff}}(r)$

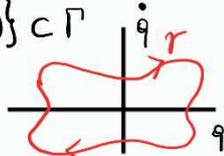
NB: la sostituzione  $\dot{\theta} \rightarrow p_{\theta}/mr^2$  è ammessa nell'Hamiltoniana, ma è illegale nella Lagrangiana:

- $L'(r, \dot{r}, \frac{p_{\theta}}{mr^2}) \Rightarrow$  eq. del moto diverse da  $L(r, \dot{r}, \dot{\theta})$
- $L_r(r, \dot{r}) = [L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) - p_{\theta} \dot{\theta}]_{\dot{\theta} = p_{\theta}/mr^2} \Rightarrow$  stesse eq. del moto di  $L(r, \dot{r}, \dot{\theta})$ .

Def: Dato un sistema Lagrangiano, si definiscono:

- Spazio delle fasi  $\Gamma = \{ \text{tutte coppie } (\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = (\text{posizione, velocità}) \text{ ammissibili} \}$
- Orbita  $\gamma = \{ (\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t)) \}_{t \in \mathbb{R}} = \omega \omega \omega$  in  $\Gamma$

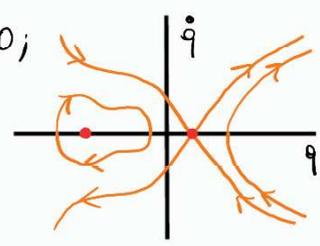
OSS:  $E = \text{cost.} \Rightarrow \gamma \subset \Gamma_E = \{ (\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \mid H(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = E \} = \{ \text{superficie di livello per } H(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \} \subset \Gamma$   
 $\uparrow$  Collezione di diverse orbite con la stessa energia e dati iniziali diversi



$p_i = \text{cost. } (i=1, \dots, k) \Rightarrow \gamma \subset \Gamma_{p_i} = \{ \text{superficie di livello di } p_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \} \Rightarrow \gamma \subset \bigcap_{i=1}^k \Gamma_{p_i}$   
 integrali primi

OSS:  $g = \# \text{gdL} = 1 \Rightarrow \gamma$  identificato da un unico integrale primo tramite i dati iniziali  
 $\Rightarrow \gamma \subset \Gamma_E = \{ \text{orbite disgiunte determinate dai dati iniziali} \}$

Proposizione: Sia  $\gamma_E \in \Gamma_E = \{ (q, \dot{q}) \mid \frac{1}{2} \omega(q) \dot{q}^2 + U(q) = E \}$  un'orbita di un sistema con  $\# \text{gdL} = 1$ .

- 1)  $\gamma_E$  è simmetrica rispetto all'asse delle ascisse  $q$ ;
  - 2)  $\gamma_E$  è percorso  $dx \rightarrow dx$  nel semipiano  $\dot{q} > 0$ ,  $dx \rightarrow -dx$  nel semipiano  $\dot{q} < 0$ ;
  - 3) Il tempo per percorrere  $\gamma_E$  da  $q_1$  a  $q_2 > q_1$  è  $t_{12} = \int_{q_1}^{q_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\omega(q)}(E-U(q))}} dq$ ;
  - 4)  $q_0 \neq \text{pt. di equilibrio} \Rightarrow \gamma_E$  interseca l'asse  $q$  con pendenza verticale; il punto  $(q_0, 0)$  è raggiunto in tempo finito.
  - 5)  $q_* = \text{pt. di equilibrio} \Rightarrow (q_*, 0)$  è un'orbita (degenera) e ogni altra orbita con  $E = U(q_*)$  impiega un tempo infinito per raggiungere  $(q_*, 0)$
- 

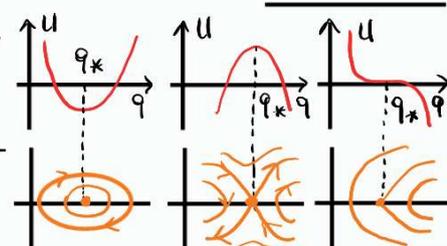
dim:  $\gamma_E = \omega \omega$  di livello di  $H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \omega(q) \dot{q}^2 + U(q)$

$\dot{q} = 0$  fisso  $\Rightarrow H(q, 0) = U(q) \rightarrow$  grafico del potenziale

$q = q_0$  fisso  $\Rightarrow H(q_0, \dot{q}) = \frac{1}{2} \omega(q_0) \dot{q}^2 + U(q_0) \rightarrow$  parabola in  $\dot{q}$

$\Rightarrow \gamma_E = \{ \text{grafico di } z = H(q, \dot{q}) \} \cap \{ z = E \} \quad (E > \min U)$   
 $= \{ \text{superficie 2D} \} \cap \{ \text{piano orizzontale ad altezza } E \}$

- 1)  $\frac{1}{2} \omega(q) \dot{q}^2 + U(q) = E, \omega > 0 \Rightarrow \dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2}{\omega(q)}(E-U(q))} \rightarrow$  due parti simmetriche rispetto ad asse  $q$ .
- 2) Semipiano  $\dot{q} > 0$  ( $\dot{q} < 0$ )  $\Rightarrow q(t) =$  funzione crescente (decrecente)
- 3)  $\frac{dq}{dt} = \dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2}{\omega(q)}(E-U(q))} \Rightarrow \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{\omega(q)}(E-U(q))}} = \pm dt \Rightarrow t_{12} = t_2 - t_1 = \int_{q_1}^{q_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\omega(q)}(E-U(q))}} dq$
- 4)  $q_0 \neq \text{pt. di eq.} \Rightarrow U'(q_0) \neq 0 \Rightarrow$  (vettore tangente a  $\gamma_E$ )  $= \frac{d}{dt}(q, \dot{q}) = (\dot{q}, \ddot{q}) = (0, -\frac{1}{\omega} U')$   
 $\Rightarrow E - U(q) = \cancel{E - U(q_0)} - [U'(q_0)(q - q_0) + \dots] \Rightarrow t \sim \int_{q_0} dq \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\omega(q_0)} U'(q_0)(q - q_0)}} < \infty$
- 5)  $q_* = \text{pt. di eq.} = \text{pt. estrema di } U = \text{pt. estrema di } H$   
 $\Rightarrow \exists!$  punto di intersezione  $\{ \text{superficie } H(q, \dot{q}) \} \cap \{ \text{piano orizzontale ad altezza } E = U(q_*) \}$  (locale)  
 $\Rightarrow U'(q_*) = 0 \Rightarrow E - U(q) = \cancel{E - U(q_*)} - [U''(q_*)/2 (q - q_*)^2 + \dots] \Rightarrow t \sim \int_{q_*} dq \frac{1}{\sqrt{\frac{U''(q_*)}{\omega(q_*)} (q - q_*)^2}} = \infty$



OSS:  $q_*$  minimo isolato di  $U \Rightarrow$  orbite chiuse e limitate in un intorno  
 $\hookrightarrow$  dati iniziali vicini a  $(q_*, 0) \Rightarrow (q(t), \dot{q}(t))$  vicino a  $(q_*, 0) \forall t$

$q_*$  massimo isolato o flesso di  $U \Rightarrow$  orbite si pongono all'infinito  
 $\hookrightarrow$  dati iniziali vicini a  $(q_*, 0) \rightarrow (q(t), \dot{q}(t))$  può essere lontano da  $(q_*, 0)$

Esempio: Oscillatore piano  $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff}(r)$

$U_{eff}(r) = \frac{P\theta^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{a}{r^2} + br^2$

$\dot{\theta} = \frac{P\theta}{mr^2} \rightarrow$  velocità angolare inversamente proporzionale a  $r$

### 6.4) Stabilità alla Lyapunov

Def: Dato un sistema Lagrangiano, un punto di equilibrio  $q_x$  è detto stabile alla Lyapunov se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } |(\bar{q}(0), \dot{\bar{q}}(0)) - (\bar{q}_x, \dot{\bar{q}})| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t)) - (\bar{q}_x, \dot{\bar{q}})| < \varepsilon \quad \forall t > 0,$$

Oss:  $|(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) - (\bar{q}_x, \dot{\bar{q}})|^2 = |\bar{q} - \bar{q}_x|^2 + |\dot{\bar{q}}|^2 \rightarrow$  equilibrio stabile se: posizioni vicine e velocità piccole

Teorema (Dirichlet-Lagrange): Dato un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi, fissi e perfetti e a forze conservative con potenziale  $U \in \mathcal{C}^0$ , si ha

$$\bar{q}_x \text{ minimo isolato di } U \Rightarrow \bar{q}_x \text{ è stabile alla Lyapunov}$$

Oss: è sufficiente  $U \in \mathcal{C}^0$  (non serve  $U \in \mathcal{C}^1$ )  $\rightarrow$  dim. si basa sul teorema di Weierstrass

Teorema (Criterio di Lyapunov): Con le ipotesi del teorema precedente e  $U \in \mathcal{C}^2$ , si ha

$$\exists \lambda < 0 \text{ autovalore di } (\text{Hess } U)(\bar{q}_x) = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right) (\bar{q}_x) \Rightarrow \bar{q}_x \text{ instabile secondo Lyapunov}$$

Oss: tutti autovalori  $> 0 \Rightarrow (\text{Hess } U)(\bar{q}_x)$  definita positiva  $\Rightarrow \bar{q}_x$  minimo isolato di  $U \Rightarrow \bar{q}_x$  eq. stabile  
 tutti autovalori  $\geq 0$  e almeno uno  $= 0 \Rightarrow \bar{q}_x$  eq. indeterminato  
 $\rightarrow$  serve sviluppo di Taylor di  $U$  a ordini più alti.

Esempio: Si consideri il sistema piano rappresentato in figura

AB = asta omogenea, massa  $m$ , lunghezza  $l$ ,  
 $\theta$  = baricentro  $\rightarrow$  cerniera sferica fissa + molle torsionale di costante  $\mu$

D = disco omogeneo, massa  $M$ , raggio  $r$ ,  
 rotola senza strisciare su AB

$\{\theta, \hat{i}, \hat{j}\}$  sist. ref. fisso  
 $\{\theta, \bar{T}, \bar{N}\}$  sist. ref. solidale con AB  $\rightarrow \begin{cases} \bar{T} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j} \\ \bar{N} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{T}} = \dot{\theta} \bar{N} \\ \dot{\bar{N}} = -\dot{\theta} \bar{T} \end{cases}$

Velocità angolare asta:  $\bar{\omega}_a = \dot{\theta} \hat{k}$   
 " disco:  $\bar{\omega}_d = \dot{\varphi} \hat{k}$

Punto rotolamento:  $\bar{V}_H^{(a)} = \bar{V}_H^{(d)}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_H^{(a)} &= \bar{V}_O + \bar{\omega}_a \wedge \overline{OH} = (\dot{\theta} \hat{k}) \wedge (s \bar{T}) = s \dot{\theta} \bar{N} \\ \bar{V}_H^{(d)} &= \bar{V}_C + \bar{\omega}_d \wedge \overline{CH} = \frac{d}{dt}(s \bar{T} + r \bar{N}) + (\dot{\varphi} \hat{k}) \wedge (-r \bar{N}) \\ &= \dot{s} \bar{T} + s \dot{\theta} \bar{N} - r \dot{\theta} \bar{T} + r \dot{\varphi} \bar{T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \dot{s} = r(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) \\ \text{vincolo} \\ \text{evoluzioni} \\ \text{integrabile} \end{cases}$$

$$T = T_a + T_d = \frac{1}{2} \bar{\omega}_a \cdot \mathbb{I}_O \bar{\omega}_a + \frac{1}{2} M |\bar{V}_C|^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}_d \cdot \mathbb{I}_C \bar{\omega}_d = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} m l^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M |(s - r\dot{\theta}) \bar{T} + s \dot{\theta} \bar{N}|^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} M r^2 \right) \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{3}{4} M \dot{s}^2 - \frac{3}{2} M r s \dot{\theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} m l^2 + M s^2 + \frac{3}{2} M r^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (\dot{s} \ \dot{\theta}) \begin{pmatrix} 3M/2 & -3Mr/2 \\ -3Mr/2 & \frac{1}{12} m l^2 + M s^2 + \frac{3}{2} M r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} \cdot A(\bar{q}) \dot{\bar{q}}$$

$$U = mg y_O + Mg y_C + \frac{1}{2} \mu \theta^2 = Mg (s \bar{T} + r \bar{N}) \cdot \hat{j} + \frac{1}{2} \mu \theta^2 = Mg (s \sin\theta + r \cos\theta) + \frac{1}{2} \mu \theta^2$$

$\rightarrow \nabla U = (\partial_s U, \partial_\theta U) = (Mg \sin\theta, Mg (s \cos\theta - r \sin\theta) + \mu \theta) \rightarrow$  Equilibrio:  $\bar{q}_x = \begin{pmatrix} s_x \\ \theta_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{0}$

$$\text{Hess } U = \begin{pmatrix} \partial_{ss} U & \partial_{s\theta} U \\ \partial_{\theta s} U & \partial_{\theta\theta} U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Mg \cos\theta \\ Mg \cos\theta & Mg (-s \sin\theta - r \cos\theta) + \mu \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Hess } U)(\bar{q}_x) = \begin{pmatrix} 0 & Mg \\ Mg & \mu - Mgr \end{pmatrix}$$

$$0 = \det[(\text{Hess } U)(\bar{q}_x) - \lambda \mathbb{1}] = \lambda(\lambda - \mu + Mgr) - (Mg)^2 \rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} [\mu - Mgr \pm \sqrt{(\mu - Mgr)^2 + 4(Mg)^2}]$$

$\Rightarrow \lambda_+ > 0, \lambda_- < 0 \Rightarrow$  equilibrio instabile.

## 6.5) Piccole oscillazioni

Nel seguito si analizzano i moti di sistemi conservativi in prossimità delle configurazioni di equilibrio

### Sistemi ad un grado di libertà

Si consideri un sistema meccanico descritto dalla Lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \omega(q) \dot{q}^2 - U(q) \quad (q, \dot{q} \in \mathbb{R}, \omega, U \in \mathcal{C}^\infty)$$

Sia  $q_*$  un pt. di eq., t.c.  $U'(q_*) = 0$ , e sia  $q(t) = q_* + \varepsilon s(t)$  con  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

Sviluppando la Lagrangiana al secondo ordine in  $\varepsilon$  si ha:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \omega(q_* + \varepsilon s) (\varepsilon \dot{s})^2 = \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2} \omega(q_*) \dot{s}^2 \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ U &= U(q_*) + U'(q_*) \varepsilon s + \frac{1}{2} U''(q_*) (\varepsilon s)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow L = \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2} \omega(q_*) \dot{s}^2 - \frac{1}{2} U''(q_*) s^2 \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Def: Posti  $\omega_* := \omega(q_*)$ ,  $k_* := U''(q_*)$  (costanti), si definisce la Lagrangiana quadratica

$$L_2(s, \dot{s}) = \frac{1}{2} \omega_* \dot{s}^2 - \frac{1}{2} k_* s^2$$

OSS:  $\omega(q) =$  matrice di massa  $> 0 \quad \forall q \Rightarrow \omega_* > 0$

OSS: Eq di Lagrange per  $L_2$ :  $0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L_2}{\partial s} = \frac{d}{dt} (\omega_* \dot{s}) - (-k_* s) \Rightarrow \ddot{s} = -\frac{k_*}{\omega_*} s$

Si trova la stessa equazione sviluppando le eq di Lagrange per  $L$  al primo ordine in  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} (\omega(q) \dot{q}) - \left( \frac{1}{2} \omega'(q) \dot{q}^2 - U'(q) \right) = \omega(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \omega'(q) \dot{q}^2 + U'(q) \quad \text{con } q = q_* + \varepsilon s \\ &= \omega(q_*) \varepsilon \ddot{s} + U'(q_*) + U''(q_*) \varepsilon s + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \varepsilon [\omega_* \ddot{s} + k_* s] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

( $\Rightarrow$  con abuso di linguaggio,  $L_2$  è talvolta chiamata Lagrangiana linearizzata)

Lemma: Posto  $\omega := \sqrt{|k_*|/\omega_*}$ , le soluzioni delle eq di Lagrange linearizzate sono date da

- $q_*$  equilibrio stabile  $\Rightarrow s(t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t) = B \cos(\omega t + \phi_0)$ ;
- $q_*$  equilibrio instabile  $\Rightarrow s(t) = B_1 \cosh(\omega t) + B_2 \sinh(\omega t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$ .

$$\begin{aligned} \text{dim: } q_* \text{ stabile} &\Rightarrow k_* = U''(q_*) > 0 \Rightarrow k_*/\omega_* = \omega^2 \Rightarrow \ddot{s} = -\omega^2 s \Rightarrow s(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \\ q_* \text{ instabile} &\Rightarrow k_* = U''(q_*) < 0 \Rightarrow k_*/\omega_* = -\omega^2 \Rightarrow \ddot{s} = \omega^2 s \Rightarrow s(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \end{aligned}$$

OSS:  $q_*$  equilibrio stabile  $\Rightarrow q(t) = q_* + \varepsilon \cos(\omega t + \phi_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \Rightarrow$  piccole oscillazioni intorno a  $q_*$

NB: le oscillazioni sono isocrone (al primo ordine), con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\omega(q_*)}{U''(q_*)}} \quad (\text{indipendente dai dati iniziali})$$

OSS:  $q_*$  equilibrio instabile  $\Rightarrow q(t) = q_* + \varepsilon (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}) \Rightarrow$  allontanamento esponenziale da  $q_*$   
 $\hookrightarrow$  approssimazione non affidabile per tempi grandi.

### Esempio (Oscillatore armonico)

$$\text{---} \xrightarrow{\text{P, m}} \text{---} \quad T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, U = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow L = L_2 = T - U \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m} x \Rightarrow x(t) = 0 + B \cos(\omega t + \phi_0), \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

### Esempio (Pendolo matematico)

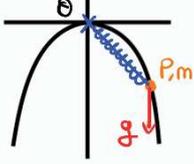
$$\text{---} \xrightarrow{\text{P, m}} \text{---} \quad T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2, U = -mgl \cos \theta \Rightarrow L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

$$\text{Equilibri: } 0 = U'(\theta) = mgl \sin \theta \Rightarrow \theta = 0 \quad \vee \quad \theta = \pi$$

$$\text{Stabilità: } 0 < U''(\theta) = mgl \cos \theta \Rightarrow \text{stabile / instabile}$$

$$\theta = 0 \rightarrow L_2(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mgl \theta^2 \rightarrow \text{piccole oscillazioni con } \omega = \sqrt{\frac{mgl}{m l^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Esempio (oscillatore parabolico) Punto materiale di massa  $m$  vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida parabolica verticale, di eq.  $y = -\frac{1}{2} \frac{x^2}{\ell}$ , e collegato al vertice della parabola da una molla ideale di costante elastica  $k$ .



$$\bar{x} = x\hat{i} + y\hat{j} = x\hat{i} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\ell} \hat{j} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m |\dot{\bar{x}}|^2 = \frac{1}{2} m \left[ 1 + \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right] \dot{x}^2$$

$$U = mgy + \frac{1}{2} k |\bar{x}|^2 = -\frac{1}{2} mg \frac{x^2}{\ell} + \frac{1}{2} k \left[ x^2 + \left(\frac{x^2}{2\ell}\right)^2 \right]$$

Pt. equilibrio:  $0 = U'(x) = \left(k - \frac{mg}{\ell}\right)x + \frac{k}{2\ell^2} x^3 = kx \left[ 1 - \frac{mg}{k\ell} + \frac{x^2}{2\ell^2} \right] \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (sempre)} \\ x = \pm \ell \sqrt{2\left(\frac{mg}{k\ell} - 1\right)} = \pm x_* \text{ se } \frac{mg}{k\ell} > 1 \end{cases}$

Stabilità:  $0 \leq U''(x) = k - \frac{mg}{\ell} + \frac{3k}{2\ell^2} x^2$

$U''(0) = k - \frac{mg}{\ell} > 0 \text{ se } \frac{mg}{k\ell} < 1$

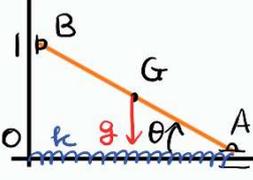
$U''(\pm x_*) = \frac{k}{2} \left(\frac{mg}{k\ell} - 1\right) > 0 \text{ se } \frac{mg}{k\ell} > 1$

$x = 0 + \epsilon s \Rightarrow L_2 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - \frac{1}{2} k \left(1 - \frac{mg}{k\ell}\right) s^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{mg}{k\ell}\right)} \text{ se } \frac{mg}{k\ell} < 1$

$x = x_* + \epsilon s \Rightarrow L_2 = \frac{1}{2} m \left[ 1 + \left(\frac{x_*}{\ell}\right)^2 \right] \dot{s}^2 - \frac{1}{2} \left[ k \left(1 - \frac{mg}{k\ell}\right) + \frac{3}{2} k \left(\frac{x_*}{\ell}\right)^2 \right] s^2 = \frac{1}{2} m \left[ 2\frac{mg}{k\ell} - 1 \right] \dot{s}^2 - \frac{1}{2} 2k \left[ \frac{mg}{k\ell} - 1 \right] s^2$

$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2k}{m} \frac{mg/k\ell - 1}{mg/k\ell - 1}} \text{ se } \frac{mg}{k\ell} > 1$

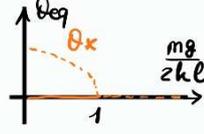
Esercizio (Scala oscillante)  $AB =$  asta omogenea, massa  $m$ , lunghezza  $\ell$ , baricentro  $G$ .  $A, B =$  carrelli,  $OA =$  molla ideale, costante elastica  $k$ .



$$\overline{OG} = \frac{\ell}{2} (\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) \rightarrow \overline{v}_G = \frac{\ell}{2} \dot{\theta} (-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}), \quad \overline{\omega} = -\dot{\theta} \hat{k}$$

$$\overline{OA} = \ell \cos\theta \hat{i} \rightarrow \overline{v}_A = -\ell \dot{\theta} \sin\theta \hat{i}$$

$$T = \frac{1}{2} m |\overline{v}_G|^2 + \frac{1}{2} \overline{\omega} \cdot \mathbb{I}_G \overline{\omega} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\ell}{2} \dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m \ell^2\right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}^2$$



$$U = mgy_G + \frac{1}{2} k x_A^2 = mg \frac{\ell}{2} \sin\theta + \frac{1}{2} k \ell^2 \cos^2\theta = \frac{1}{2} k \ell^2 \left[ \cos^2\theta + \frac{mg}{k\ell} \sin\theta \right]$$

Equilibrio:  $0 = U'(\theta) = \frac{1}{2} k \ell^2 \left[ -2 \cos\theta \sin\theta + \frac{mg}{k\ell} \cos\theta \right] = \frac{k \ell^2}{2} \left[ \frac{mg}{k\ell} - 2 \sin\theta \right] \cos\theta$

$\theta = \pi/2$  (sempre)

$\theta = \arcsin\left(\frac{mg}{2k\ell}\right) = \theta_* \text{ se } \frac{mg}{2k\ell} < 1$

Stabilità:  $0 \leq U''(\theta) = \frac{1}{2} k \ell^2 \left[ 4 \sin^2\theta - 2 - \frac{mg}{k\ell} \sin\theta \right]$

$U''(\pi/2) = \frac{1}{2} k \ell^2 \left( 2 - \frac{mg}{k\ell} \right)$  stabile se  $\frac{mg}{2k\ell} < 1$

$U''(\theta_*) = 2 \left[ \left(\frac{mg}{2k\ell}\right)^2 - 1 \right] \rightarrow$  instabile se  $\frac{mg}{2k\ell} > 1$

Piccole oscillazioni vicino a  $\theta = \pi/2$  con  $\frac{mg}{2k\ell} < 1$

$\theta = \frac{\pi}{2} + \epsilon s \Rightarrow L_2(s, \dot{s}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m \ell^2\right) \dot{s}^2 - \frac{1}{2} \left[ k \ell^2 \left(1 - \frac{mg}{2k\ell}\right) \right] s^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3k}{m} \left(1 - \frac{mg}{2k\ell}\right)}$

Sistemi a più gradi di libertà

L'analisi precedente può essere generalizzata al caso di sistemi con più gradi di libertà. Sia  $\bar{q}_*$  un punto di equilibrio, t.c.  $\nabla U(\bar{q}_*) = 0$ , e si ponga  $\bar{q} = \bar{q}_* + \epsilon \bar{s}$  con  $0 < \epsilon \ll 1$ . Sviluppando la Lagrangiana in serie di Taylor rispetto a  $\epsilon$  si ottiene

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} \cdot A(\bar{q}) \dot{\bar{q}} = \frac{1}{2} (\epsilon \dot{\bar{s}}) \cdot A(\bar{q}_* + \epsilon \bar{s}) (\epsilon \dot{\bar{s}}) = \epsilon^2 \left[ \frac{1}{2} \dot{\bar{s}} \cdot A(\bar{q}_*) \dot{\bar{s}} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

$$U = U(\bar{q}_* + \epsilon \bar{s}) = U(\bar{q}_*) + \nabla U(\bar{q}_*) \cdot \epsilon \bar{s} + \frac{1}{2} \epsilon \bar{s} \cdot [\text{Hess} U(\bar{q}_*)] \epsilon \bar{s} + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

Def: Pochi  $A_* := A(\bar{q}_*)$ ,  $K_* := (\text{Hess} U)(\bar{q}_*)$ , si definisce la Lagrangiana quadratica

$$L_2(\bar{s}, \dot{\bar{s}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{s}} \cdot A_* \dot{\bar{s}} - \frac{1}{2} \bar{s} \cdot K_* \bar{s}$$

OSS:  $A =$  matrice di massa (simmetrica, definita positiva)  $\Rightarrow A_*^T = A_*$ ,  $A_* > 0$

$K_* =$  Hessiano di  $U$  in  $\bar{q}_* \Rightarrow K_*^T = K_*$  ( $K_* > 0$  se  $\bar{q}_*$  pt. di minimo)

OSS:  $0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{\bar{s}}_i} - \frac{\partial L_2}{\partial \bar{s}_i} = \sum_j [(A_*)_{ij} \ddot{\bar{s}}_j + (K_*)_{ij} \bar{s}_j] \Rightarrow A_* \ddot{\bar{s}} = -K_* \bar{s} \Rightarrow \ddot{\bar{s}} = -A_*^{-1} K_* \bar{s}$

↳ Sistema in forma normale di eq. diff. ordinarie del II° ordine, accoppiate  
 Se  $A_*^{-1}K_*$  è simmetrica  $\Rightarrow A_*^{-1}K_*$  diagonalizzabile  $\rightarrow$  disaccoppiamento del sistema  
 In generale:  $(A_*^{-1}K_*)^T = K_*^T(A_*^{-1})^T = K_*A_*^{-1} \neq A_*^{-1}K_* \rightarrow A_*^{-1}K_*$  non è simmetrica.

Teorema (Modi normali): Esiste  $\{\bar{e}_i\}$  base di autovettori di  $A_*^{-1}K_*$  t.c.

$$A_*^{-1}K_* \bar{e}_i = \lambda_i \bar{e}_i, \quad \bar{s}(t) = \sum_{i=1}^g \sigma_i(t) \bar{e}_i \Rightarrow \ddot{\sigma}_i = -\lambda_i \sigma_i$$

OSS: sistema in forma normale di g eq. diff. ordinarie del II° ordine disaccoppiate

OSS:  $\bar{q}_*$  equilibrio stabile  $\rightarrow \sigma_i \equiv$  modi normali,  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i} =$  frequenze proprie

dim: la dimostrazione si basa su una applicazione del teorema spettrale

1)  $A_*^T = A_*$ ,  $A_* > 0 \Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_A = \bar{x} \cdot A_* \bar{y}$  definisce un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^g$  (diverso da quello std)  
 (applicazione bilineare, simmetrica, definita positiva).  
 $\Rightarrow V_A = (\mathbb{R}^g, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$  è uno spazio vettoriale Euclideo.

2)  $\langle \bar{x}, A_*^{-1}K_* \bar{y} \rangle_A = \bar{x}^T A_* A_*^{-1}K_* \bar{y} = \bar{x}^T K_* \bar{y} = \bar{x}^T K_*^T \bar{y} = \bar{x}^T K_*^T (A_*^{-1})^T A_* \bar{y} = (A_*^{-1}K_* \bar{x})^T A_* \bar{y} = \langle A_*^{-1}K_* \bar{x}, \bar{y} \rangle_A$   
 $\Rightarrow A_*^{-1}K_*$  simmetrica rispetto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A \rightarrow$  Teorema spettrale reale  
 $\Rightarrow \exists \{\bar{e}_i\}_{i=1, \dots, g}$  base ortonormale rispetto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  t.c.  $A_*^{-1}K_* \bar{e}_i = \lambda_i \bar{e}_i$ ,  $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle_A = \delta_{ij}$

3)  $\bar{s}(t) = \sum_{i=1}^g \sigma_i(t) \bar{e}_i \Rightarrow \sum_i \ddot{\sigma}_i \bar{e}_i = \ddot{\bar{s}} = -A_*^{-1}K_* \bar{s} = -\sum_i \sigma_i A_*^{-1}K_* \bar{e}_i = -\sum_i \lambda_i \sigma_i \bar{e}_i \Rightarrow \ddot{\sigma}_i = -\lambda_i \sigma_i$

OSS: Modi normali e frequenze proprie sono determinabili come segue:

$$A_*^{-1}K_* \bar{e}_i = \lambda_i \bar{e}_i \Leftrightarrow (K_* - \lambda_i A_*) \bar{e}_i = 0 \Leftrightarrow \lambda \text{ t.c. } \det[K_* - \lambda A_*] = 0$$

$$\bar{e}_\lambda \in \mathbb{R}^g \text{ t.c. } K_* \bar{e}_\lambda = \lambda A_* \bar{e}_\lambda$$

OSS: La Lagrangiana espressa in funzione dei modi normali è

$$L_2(\bar{\sigma}, \dot{\bar{\sigma}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g [\dot{\sigma}_i^2 - \lambda_i \sigma_i^2] = \frac{1}{2} |\dot{\bar{\sigma}}|^2 - \frac{1}{2} \bar{\sigma} \Lambda \bar{\sigma} \quad \text{con } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_g \end{pmatrix}$$

dim: Il risultato si basa sulla diagonalizzazione simultanea di due matrici simmetriche

$A_* = A_*^T > 0 \Rightarrow \exists \{\bar{b}_i\}_{i=1, \dots, g}$  bon di autovettori di  $A_*$   
 $\Rightarrow \exists W = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_g)$  ortogonale t.c.  $W W^T = W^T W = \mathbb{1}$ ,  $W^T A_* W = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_g \end{pmatrix}$

Ponendo  $N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sqrt{\alpha_g} \end{pmatrix}$  e  $\bar{r}(t) = N^{-1} W^T \bar{s}(t)$ , si ha  $A_* = W N^{-2} W^T$ ,  $\bar{s}(t) = W N \bar{r}(t)$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{1}{2} \dot{\bar{s}}^T A_* \dot{\bar{s}} = \frac{1}{2} (W N \dot{\bar{r}})^T (W N^{-2} W^T) (W N \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{r}}^T N^T W^T W N^{-2} W^T W N \dot{\bar{r}} = \frac{1}{2} |\dot{\bar{r}}|^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \bar{s}^T K_* \bar{s} = \frac{1}{2} (W N \bar{r})^T K_* (W N \bar{r}) = \frac{1}{2} \bar{r}^T N^T W^T K_* W N \bar{r} = \frac{1}{2} \bar{r}^T L \bar{r}$$

con  $L := N^T W^T K_* W N$ ,  $K_* = K_*^T$ ,  $N_* = N_*^T \Rightarrow L^T = L$  simmetrica

$\Rightarrow \exists \{\bar{c}_i\}_{i=1, \dots, g}$  bon di autovettori di  $L$

$\Rightarrow \exists Z = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_g)$  ortogonale t.c.  $Z Z^T = Z^T Z = \mathbb{1}$ ,  $Z^T L Z = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_g \end{pmatrix}$

Ponendo  $\bar{\sigma}(t) = Z^T \bar{r}(t) = Z^T N^{-1} W^T \bar{s}(t) \Rightarrow \bar{s}(t) = W N^{-1} Z \bar{\sigma}(t)$ ,  $\bar{r}(t) = Z \bar{\sigma}(t)$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{1}{2} \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} = \frac{1}{2} (Z \dot{\bar{\sigma}})^T (Z \dot{\bar{\sigma}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{\sigma}}^T Z^T Z \dot{\bar{\sigma}} = \frac{1}{2} \dot{\bar{\sigma}}^T \dot{\bar{\sigma}}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \bar{r} \cdot L \bar{r} = \frac{1}{2} (Z \bar{\sigma})^T L (Z \bar{\sigma}) = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^T Z^T L Z \bar{\sigma} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^T \Lambda \bar{\sigma}$$

• Eq. Lagrange:  $0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{\sigma}_i} - \frac{\partial L_2}{\partial \sigma_i} = \ddot{\sigma}_i + \lambda_i \sigma_i$

Esempio (Molle in serie)

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} (\dot{x}_1 \ \dot{x}_2) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \dot{\bar{x}} \cdot A_* \dot{\bar{x}}$$



$$U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k (L - x_2)^2 = \frac{k}{2} [2x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 2Lx_2 + L^2]$$

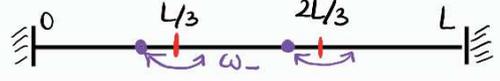
Equilibrio:  $0 = \nabla U = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} U \\ \partial_{x_2} U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(2x_1 - x_2) \\ k(-x_1 + 2x_2 - L) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ 3x_1 = L \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{L}{3}, x_2 = \frac{2L}{3}$

Stabilità:  $\text{Hess } U = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} = K_* \rightarrow 0 = \det[\text{Hess } U - \lambda \mathbb{1}] = (2k - \lambda)^2 - k^2 < \begin{cases} \lambda_+ = 3k > 0 \\ \lambda_- = k > 0 \end{cases}$  equilibrio stabile

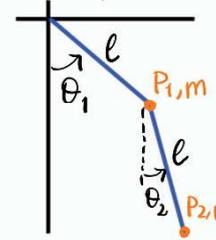
Modi normali:  $0 = \det(K - \lambda A) = \begin{vmatrix} 2k - \lambda m & -k \\ -k & 2k - \lambda m \end{vmatrix} = (2k - \lambda m)^2 - k^2 < \begin{cases} \lambda_+ = \frac{3k}{m} = \omega_+^2 \\ \lambda_- = \frac{k}{m} = \omega_-^2 \end{cases} \omega_+ > \omega_-$

$K_* \bar{e}_+ = \lambda_+ A_* \bar{e}_+ \rightarrow \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k & 0 \\ 0 & 3k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{e}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L/3 \\ 2L/3 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \cos(\omega_+ t + \phi_0) \\ -\cos(\omega_+ t + \phi_0) \end{pmatrix}$

$K_* \bar{e}_- = \lambda_- A_* \bar{e}_- \rightarrow \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{e}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L/3 \\ 2L/3 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \cos(\omega_- t + \phi_0) \\ \cos(\omega_- t + \phi_0) \end{pmatrix}$



Esempio (doppio pendolo)



$\bar{x}_1 = l(\sin\theta_1 \hat{i} + \cos\theta_1 \hat{j})$   
 $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + l(\sin\theta_2 \hat{i} + \cos\theta_2 \hat{j})$   
 $T = \frac{1}{2} m |\dot{\bar{x}}_1|^2 + \frac{1}{2} m |\dot{\bar{x}}_2|^2 = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ ml^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$   
 $U = mgy_1 + mgy_2 = -mg\ell(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$

Equilibrio:  $0 = \nabla U = \begin{pmatrix} \partial_{\theta_1} U \\ \partial_{\theta_2} U \end{pmatrix} = mg\ell \begin{pmatrix} 2\sin\theta_1 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow (\theta_1, \theta_2) \in \{(0,0), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi)\}$

Stabilità:  $\text{Hess } U = mg\ell \begin{pmatrix} 2\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$  solo  $(\theta_1, \theta_2) = (0,0)$  è eq. stabile

Modi normali:  $A_x = A(0,0) = ml^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, K_* = (\text{Hess } U)(0,0) = mg\ell \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$0 = \det[K_* - \lambda A_*] = ml^2 \begin{vmatrix} 2g\ell - 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & g\ell - \lambda \end{vmatrix} = ml^2 \left[ \left(\frac{2g}{\ell} - \lambda\right) \left(\frac{g}{\ell} - \lambda\right) - \lambda^2 \right] \Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \pm 1} \frac{g}{\ell} = \omega_{\pm}^2 \omega_+ < \omega_-$

$K_* \bar{e}_+ = \lambda_+ A_* \bar{e}_+ \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \cos(\omega_+ t + \phi_0) \\ \sqrt{2} \cos(\omega_+ t + \phi_0) \end{pmatrix}$

$K_* \bar{e}_- = \lambda_- A_* \bar{e}_- \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \cos(\omega_- t + \phi_0) \\ -\sqrt{2} \cos(\omega_- t + \phi_0) \end{pmatrix}$

